UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4nouvellesannal15pari

I

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

Phys & Math

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XV.

(LXXIVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

143036
18/6/17

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1915

QA
1
N8
v. 74

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

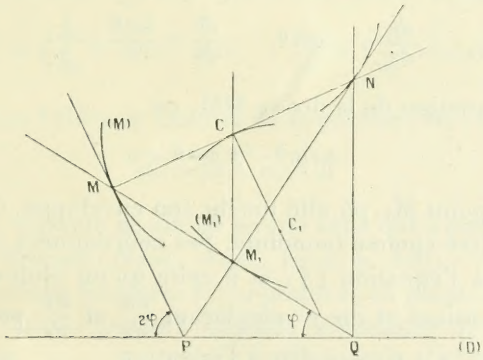
[O¹2]

QUELQUES APPLICATIONS DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES;

PAR M. F. BALITRAND.

Soient (M) une courbe, M un point de cette courbe, Mx et My la tangente et la normale en ce point. Nous prendrons ces deux droites pour axes mobiles de coordonnées et nous choisirons l'arc s de la courbe (M) comme variable indépendante.

Par le point M menons une droite MM_1, inclinée



d'un angle θ sur la tangente Mx; cet angle sera consi-

déré comme fonction de l'arc s, c'est-à-dire variera en même temps que le point M sur la courbe (M). La droite MM_1 enveloppera donc une certaine courbe (M_1); M_1 désignant son point de contact avec son enveloppe.

Soient s, ρ, ε l'arc, le rayon de courbure, l'angle de contingence de (M) au point M; s_1, ρ_1, ε_1 les mêmes éléments de (M_1) au point correspondant M_1.

Désignons par x et y les coordonnées d'un point du plan par rapport aux axes Mx et My, qui sont mobiles. Ces coordonnées seront supposées fonctions de s. On a les formules suivantes, dues à Cesàro,

$$(1) \qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + 1 - \frac{y}{\rho}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho};$$

les caractéristiques d et δ se rapportent au mouvement absolu et au mouvement relatif du point M.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'immobilité de ce point sont donc

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho};$$

ou, en coordonnées polaires r et θ,

$$(3) \qquad \frac{dr}{ds} = -\cos\theta, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{r} - \frac{1}{\rho}.$$

L'équation de la droite MM_1 est

$$(4) \qquad x\sin\theta - y\cos\theta = 0.$$

Le point M_1, où elle touche son enveloppe, doit être considéré comme immobile. Ses coordonnées satisfont donc à l'équation (4) et à celle qu'on obtient en la différentiant et en y remplaçant $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ par leurs valeurs (2); c'est-à-dire à l'équation

$$(5) \qquad x\cos\theta + y\sin\theta - h\sin\theta = 0,$$

où l'on a posé

$$(6) \qquad \frac{1}{h} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho};$$

h représente le segment MN, détaché sur la normale en M à (M), par la normale en M_1 à (M_1).

Différentions encore (5); nous obtenons, en tenant compte de (2),

$$(7) \quad x \sin\theta - y \cos\theta + h \cos\theta \left(2 - \frac{h}{\rho}\right) + \frac{dh}{ds} h \sin\theta = 0.$$

Cette droite est la normale à la développée de (M_1). Sa distance à l'origine est égale au rayon de courbure de cette courbe; d'où l'expression suivante de ce rayon de courbure

$$(8) \qquad \rho_1 = h \cos\theta \left(2 - \frac{h}{\rho}\right) + \frac{dh}{ds} h \sin\theta.$$

Plus loin nous trouverons d'autres expressions.

Les coordonnées de M_1 peuvent s'écrire

$$(9) \quad x = r \cos\theta = h \sin\theta \cos\theta, \qquad y = r \sin\theta = h \sin^2\theta.$$

Les formules (1), appliquées à ce point, donnent

$$(10) \quad \frac{\partial x}{ds} = \left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right) \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{ds} = \left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right) \sin\theta;$$

d'où pour l'élément linéaire de la courbe (M_1)

$$(11) \qquad ds_1 = dr + \cos\theta \, ds.$$

Cette formule ne diffère pas de celle qui a été établie par M. Bricard (*Nouv. Ann.*, 1913, p. 306).

Les mêmes formules (1) appliquées au point $\cos\theta$ et $\sin\theta$, c'est-à-dire aux cosinus directeurs de MM_1, donnent

$$(12) \qquad \varepsilon_1 = d\theta + \varepsilon,$$

et l'on en déduit aussitôt les formules ci-dessous, souvent utiles dans les applications :

$$ds = \frac{r\varepsilon_1}{\sin\theta}, \tag{13}$$

$$\rho_1 = h\left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right), \tag{14}$$

$$\rho_1 = \frac{dr}{\varepsilon_1} + r\cot\theta, \tag{15}$$

$$\frac{\rho}{h} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \qquad \frac{\rho_1}{h} = \frac{ds_1}{ds}. \tag{16}$$

Pour faire quelques applications, reprenons la formule (6)

$$\frac{1}{h} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho} \tag{6}$$

et faisons diverses hypothèses sur l'angle θ qui règle le mouvement de la droite MM_1. Le cas particulier le plus simple, le premier à considérer, est celui de $\frac{d\theta}{ds} = 0$, d'où $\theta = \text{const}$. Les formules précédentes résument alors la théorie des développoïdes (*voir* par exemple E. Cesàro, *Nouv. Ann. de Math.*, 1886, p. 67 et suiv.).

Après $\frac{d\theta}{ds} = 0$, il est naturel de supposer $\frac{d\theta}{ds} = \text{const}$. Cette hypothèse ne semble pas conduire à des résultats simples et intéressants lorsque la courbe (M) est quelconque; mais il en est autrement si on la particularise et si l'on suppose qu'elle est un cercle. Faisons donc, dans les relations ci-dessus,

$$ds = k\,d\theta, \qquad \rho = a;$$

k et a étant deux constantes. Il résulte de là que h est constant et égal à

$$\frac{ak}{a+k}.$$

Puis de $r = h \sin\theta$ on déduit

$$dr = h \cos\theta \, d\theta;$$

et les formules (14) et (11) donnent

$$\rho_1 = \frac{h(h+k)}{k} \cos\theta,$$

$$ds_1 = (h+k) \cos\theta \, d\theta;$$

d'où

$$s_1 = (h+k) \sin\theta$$

à une constante près qu'on peut négliger, puisque l'origine des arcs est arbitraire. Il en résulte, pour le lieu du point M_1, l'équation intrinsèque suivante

$$\frac{s_1^2}{(h+k)^2} + \frac{k^2 \rho_1^2}{h^2 (h+k)^2} = 1,$$

équation intrinsèque d'une épi- ou hypocycloïde, engendrée par un cercle de rayon $\frac{ak}{2(a+k)}$ roulant sur un cercle de rayon $\frac{a^2}{a+k}$. Comme l'équation contient deux arbitraires, a et K, elle peut représenter une épi- ou hypocycloïde quelconque. D'où le théorème suivant (Demartres, *Cours de Géométrie infinitésimale*, p. 163) :

Toute épi- ou hypocycloïde est l'enveloppe d'une droite qui tourne uniformément autour d'un de ses points, tandis que celui-ci décrit, d'un mouvement uniforme, un cercle.

Reprenons la formule (6) et supposons $h = \lambda\rho$, λ étant une constante. Cela revient à dire que le point N, intersection des normales en M et M_1 à (M) et (M_1), décrit une développée intermédiaire de (M).

La formule (6) donne

$$d\theta = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{ds}{\rho} = \frac{1-\lambda}{\lambda}d\varphi;$$

φ désigne l'angle de la tangente à (M), en M, avec une droite fixe de son plan, qu'on peut appeler *directrice*. On a donc

$$\theta = \frac{1-\lambda}{\lambda}\varphi$$

à une constante près que nous négligerons. C'est le cas envisagé par M. Braude, dans la troisième partie de son article des *Nouvelles Annales* (1913, p. 506 et suiv.). On voit que l'enveloppe de MM_1 est *celle d'une droite menée par* M *et faisant avec la tangente en ce point un angle égal à k fois* $\left(k = \frac{1-\lambda}{\lambda}\right)$ *l'angle de cette tangente avec une droite fixe de son plan.*

En particulier, pour $\lambda = 2$, le point N coïncide avec l'extrémité du diamètre du cercle osculateur à (M) en M. Si C désigne le centre de courbure en ce point, on voit que, dans le triangle rectangle MNM_1, le segment CM_1, médiane de ce triangle, est égal à CM; c'est-à-dire à ρ. De plus, la direction de CM_1, lorsque M varie, reste fixe et perpendiculaire à la directrice. Dans ces conditions, *la courbe enveloppée par* MM_1 *coïncide avec le lieu des extrémités des segments égaux aux rayons de courbure de* (M), *menés par les centres de courbure correspondants, parallèlement à une direction fixe.*

Inversement, on peut dire que *si, par le centre de courbure correspondant à chaque point de* (M), *on mène, parallèlement à une direction fixe, un segment égal au rayon de courbure en ce point, le lieu des extrémités de ces segments est une courbe* (M_1) *dont la tangente passe par* (M).

(M_1) est donc une ligne de poursuite pour (M) et le rapport des vitesses sur les deux courbes est facile à évaluer. En effet, en vertu des formules précédentes ou des hypothèses faites, on a

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{dr}{ds} + \cos\theta, \qquad r = h\sin\theta = 2\rho\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{2\rho}, \qquad \theta = -\frac{\varphi}{2}.$$

On en déduit

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{2R}{\rho}\sin\frac{\varphi}{2};$$

R désignant le rayon de courbure de la développée de (M). Signalons aussi, en vertu de (16), la formule

$$\rho_1 = 4R\sin\frac{\varphi}{2}$$

qui fournit une construction géométrique évidente du centre de courbure de (M_1).

Pour faire une application de ce qui précède, prenons comme courbe (M) celle qui a pour équation intrinsèque

$$\rho = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right);$$

elle est connue sous le nom de *syntractrice*. La forme de son équation conduit à introduire un paramètre variable, défini par la relation

$$e^{\frac{s}{a}} = t;$$

d'où

$$\rho = \frac{a}{2}\,\frac{1+t^2}{2t}.$$

Par suite en posant

$$t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

on a

$$s = a \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}, \qquad \rho = \frac{a}{2 \sin \varphi}, \qquad \frac{ds}{\rho} = 2\, d\varphi;$$

la tangente au point M à (M) fait donc avec une droite fixe D, un angle égal à 2φ.

La droite menée par M, faisant, avec la tangente à (M) en ce point, un angle égal à φ, enveloppe une courbe (M_1), qu'elle touche au point M_1. D'après ce qui précède, la normale en M_1 à (M_1) coupe la normale à (M) en M, à l'extrémité N, du diamètre du cercle osculateur en ce point. La droite qui joint le centre de courbure C, correspondant à M, à M_1, est égale au rayon de courbure en M et est perpendiculaire à la droite D.

Demandons-nous quelles sont, dans le cas présent, les courbes lieux des points M_1 et N. Soient P et Q les points d'intersection, avec D, de la tangente en M à (M) et de la droite MM_1. Le triangle MPQ est isoscèle et M_1, pied de la hauteur abaissée de P sur MQ, est le milieu de MQ. Dans le triangle MM_1N, on a

$$MM_1 = MN \sin \varphi = 2\rho \sin \varphi = a;$$

en vertu de la relation $\rho = \frac{a}{2 \sin \varphi}$. Donc M_1Q, qui est égal à MM_1, est constant et, par suite, le lieu du point M_1 est une tractrice. Il en résulte, d'après des propriétés connues, que le lieu du point N est une chaînette, développée de la tractrice.

Ce qui précède fournit une construction, d'ailleurs connue (*Nouv. Ann.*, 1891, p. 86), du centre de courbure de la syntractrice. *Le centre de courbure*, C, *de la syntractrice, relatif au point* M, *est au milieu du segment qui joint ce point au centre de courbure du point correspondant de la tractrice.*

Il est également possible d'arriver, au moyen des considérations ci-dessus, à une construction géométrique simple du rayon de courbure de la développée de la syntractrice. Il suffit pour cela de se reporter à la formule $\rho_1 = 4R \sin\frac{\varphi}{2}$. Seulement, au lieu d'y supposer R connu et ρ_1 inconnu, c'est l'inverse qu'on doit faire. Il faut de plus observer que $\frac{\varphi}{2}$ doit y être remplacé par φ. On a alors $\rho_1 = 4R \sin\varphi$, et comme $\rho_1 = 2\rho\cos\varphi$, on en déduit $2R = \rho \cot\varphi$. D'où la construction suivante :

Le rayon de courbure CC_1 *de la développée de la syntractrice s'obtient en prenant la moitié du segment déterminé sur la normale à cette développée par la droite* MM_1.

La syntractrice et la tractrice fournissent donc un exemple d'un couple de courbes, telles que les normales aux points correspondants se coupent en un point dont le lieu est une développée intermédiaire pour l'une des courbes, et une développée, au sens ordinaire du mot, pour l'autre. Proposons-nous de trouver toutes les courbes jouissant de cette propriété. Les formules ci-dessus le permettent aisément.

En effet, on a, par hypothèse, $h = \lambda\rho$, λ étant une constante, et $\rho_1 = h\cos\theta = \lambda\rho\cos\theta$. La relation (16) donne $\frac{ds_1}{ds} = \cos\theta$, et il en résulte en vertu de (11) que r est une constante. Ainsi, *quelles que soient les courbes, la distance des points correspondants est constante.*

A cause de la relation (6) on a

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1-\lambda}{\lambda}\rho.$$

d'où

$$d\theta = k\,d\varphi,$$

en posant

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = k$$

et en désignant par φ l'angle de la tangente en M à (M) avec une droite fixe du plan de la courbe. Donc $\theta = k\varphi$; on peut ne pas introduire de constante; il suffit pour cela de choisir pour origine des arcs le point où la tangente est parallèle à la droite fixe.

Les formules (13) et (16) conduisent alors sans difficulté à la relation

$$\rho = \frac{(k+1)r}{\sin k\varphi} = \frac{\alpha}{\sin k\varphi};$$

qui est l'équation générale des courbes cherchées en coordonnées intrinsèques (ρ et φ); α désigne une constante arbitraire. Pour $k = -\frac{1}{2}$, on retrouve bien la syntractrice.

Quant aux courbes (M_1), leur équation générale est également aisée à trouver. On a en effet

$$\rho_1 = k\rho\cos\theta = \frac{k\alpha\cos k\varphi}{\sin k\varphi} = k\alpha\cot k\varphi.$$

Mais la relation

$$\frac{\rho}{h} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \tag{16}$$

donne

$$\varepsilon_1 = (k+1)\varepsilon.$$

Par suite, en désignant par ψ l'angle de la tangente à (M_1) avec la droite fixe, on a

$$d\psi = (k+1)\,d\varphi;$$

d'où

$$\psi - \psi_0 = (k+1)\varphi,$$

et l'équation précédente devient

$$\rho_1 = k\alpha \cot \frac{k}{k+1}(\psi - \psi_0).$$

C'est l'équation des courbes (M_1) en coordonnées intrinsèques (ρ_1 et ψ). Par un changement de la droite fixe, elle peut se mettre sous la forme

$$\rho_1 = \beta \cot m\psi;$$

β et m sont des constantes. Ce qui précède se résume ainsi :

Par chaque point M *d'une courbe* (M) *d'équation intrinsèque* $\rho = \frac{\alpha}{\sin k\varphi}$, *menons une droite faisant avec la tangente en ce point un angle égal à* $k+1$ *fois l'angle de la tangente avec une droite fixe de son plan; elle enveloppe une courbe* (M_1) *jouissant des propriétés suivantes :* 1° *elle appartient à la famille des courbes d'équation intrinsèque* $\rho_1 = \beta \cot m\psi$; 2° *la distance des points correspondants sur* (M) *et* (M_1) *est constante;* 3° *le point de rencontre des normales à* (M) *et* (M_1), *aux mêmes points, décrit une courbe qui est à la fois développée intermédiaire de* (M) *et développée, au sens ordinaire du mot, de* (M_1).

Dans le cas où la courbe, lieu du point de rencontre des normales, est une développée pour (M) et une développée intermédiaire pour (M_1), le problème se résout d'une façon analogue. On trouve que les courbes (M) et (M_1) sont deux spirales logarithmiques et que la distance des points correspondants est une fonction linéaire de l'arc. De plus, l'angle θ est constant.

Nous avons ainsi examiné deux cas : celui où le lieu décrit par le point N est développée intermédiaire pour (M), sans l'être pour (M_1), et celui où le même lieu est à la fois développée intermédiaire de (M) et de (M_1). Il reste un troisième cas à examiner : celui où le lieu en question est développée intermédiaire de (M_1), sans l'être pour (M).

Dans cette hypothèse, on a

$$k\rho_1 = h\cos\theta.$$

La formule (16) donne alors

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos\theta}{k}$$

et la formule (11)

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1-k}{k}\cos\theta.$$

Comme

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{ds_1} \times \frac{ds_1}{ds},$$

on voit que

$$\frac{dr}{ds_1} = 1 - k;$$

donc r est une fonction linéaire de l'arc de la courbe (M_1).

Ainsi la solution générale du problème s'obtient en prenant une courbe quelconque (M_1) et en portant sur ses tangentes, à partir du point de contact, des longueurs fonctions linéaires de l'arc de la courbe, compté à partir d'un point fixe.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1914).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. J. LEMAIRE,
Professeur au Lycée Janson de Sailly.

On donne un hyperboloïde à une nappe rapporté à ses axes et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = 1.$$

I. *Il existe deux familles de tels hyperboloïdes susceptibles d'être engendrées par l'intersection de plans rectangulaires passant respectivement par deux droites fixes; on peut passer d'un hyperboloïde* H *de la première famille à un hyperboloïde* H′ *de la seconde famille par rotation d'un angle droit autour de* OZ. *Soient* D, Δ *les droites fixes relatives à* H; D′ Δ′ *les droites fixes relatives à* H′; *trouver les surfaces lieux de* D, Δ *et de* D′ Δ′, *quand* λ, μ *varient,* ρ *étant fixe. Il existe des plans* P *parallèles au plan* XOY *coupant ces surfaces suivant deux courbes qui ont un point commun* A *situé sur* OZ *et un point commun* B *réel situé dans le trièdre* OXYZ; *évaluer l'aire limitée par les arcs* AB *des deux courbes, ainsi que le volume engendré par cette aire quand le plan* P *a une cote variant de* z_1 *à* z_2.

II. *A un hyperboloïde* H_1 *de la première famille,*

on peut faire correspondre une infinité d'hyperboloïdes de la seconde famille, tels que les droites fixes relatives à H_1 *et les droites fixes relatives à un de ces derniers forment un quadrilatère gauche; soient* H_2 *un tel hyperboloïde;* $D_1 \Delta_1$ *et* $D_2 \Delta_2$ *les droites fixes relatives respectivement à* H_1 *et à* H_2; ABCD *le quadrilatère formé par ces droites; montrer que l'hyperboloïde* H_3, *engendré par l'intersection de deux plans rectangulaires passant respectivement par les diagonales du quadrilatère, appartient au faisceau ponctuel linéaire défini par* H_1 *et* H_2; *que les pieds* a, b, c, d *des hauteurs* Aa, Bb, Cc, Dd *du tétraèdre* ABCD *sont sur la courbe du faisceau, et que les droites autres que les hauteurs, qui joignent les points* A, B, C, D *aux points* a, b, c, d, *sont sur un hyperboloïde* H_1, H_2 *ou* H_3.

III. *L'hyperboloïde* H_1 *étant donné, on peut, par un point* A *de l'espace, faire passer deux hyperboloïdes* H_2 *de la seconde famille, définis comme il a été indiqué* (II); *sur quelle surface* S *doit se trouver* A *pour que ces hyperboloïdes* H_2 *soient confondus? On peut de même, par le point* A, *faire passer deux hyperboloïdes* H_3 *définis comme il a été indiqué* (II); *sur quelle surface* S' *doit être* A *pour que ces hyperboloïdes* H_3 *soient confondus? Montrer que* H_1 *coupe* S *et* S' *suivant la même courbe* C, *et que l'intersection de* S *et* S' *se compose de la courbe* C *et d'une courbe imaginaire.*

IV. *Construire la projection* Γ, *sur le plan* XOY, *de la courbe* C; *montrer que* Γ *est l'enveloppe de cercles orthogonaux à un cercle fixe, et trouver le lieu des centres de ces cercles. Trouver le lieu des*

milieux des cordes de la courbe Γ *qui passent par l'origine.*

I. On sait que si deux plans rectangulaires tournent respectivement autour de deux droites D, Δ non en même plan, leur intersection engendre un hyperboloïde contenant D et Δ, ayant ses plans de sections circulaires perpendiculaires à ces droites, et dont l'ellipse de gorge a pour axe focal leur plus courte distance ; inversement, si un hyperboloïde a ses sections circulaires perpendiculaires à deux génératrices, qui passent nécessairement aux extrémités de l'axe focal de l'ellipse de gorge, il est susceptible de ce mode de génération. Si donc l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = 1 \tag{1}$$

peut être ainsi engendré, les droites D et Δ ne peuvent être que deux génératrices de même espèce passant aux sommets opposés situés sur X'X ou Y'Y.

Première famille. — D et Δ passent aux extrémités de l'axe appartenant à X'X ; les équations de D étant

$$x = \lambda, \qquad z = \frac{\rho y}{\mu}, \tag{D}$$

celles de Δ sont

$$x = -\lambda, \qquad z = -\frac{\rho y}{\mu}. \tag{Δ}$$

Les plans perpendiculaires à ces droites et passant par OX, c'est-à-dire les plans

$$-\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\mu^2} = 0 \tag{2}$$

devant être des plans cycliques, l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)(y^2 + z^2) = 1,$$

obtenue en ajoutant (1) et (2) membre à membre, doit représenter une sphère, d'où la condition

$$(3) \qquad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\rho^2}$$

qui exige $\lambda > \mu$.

En remplaçant D et Δ par les génératrices de l'autre système passant aux mêmes sommets, on a le même hyperboloïde H.

Deuxième famille. — Par analogie, si l'on a

$$(3)' \qquad \frac{1}{\mu'^2} = \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\rho'^2},$$

l'hyperboloïde correspondant H′ est susceptible du mode de génération indiqué dans l'énoncé, les droites D′ et Δ' étant les génératrices de même espèce,

$$(D') \qquad y = \mu', \qquad z = \frac{\rho' x}{\lambda'};$$

$$(\Delta') \qquad y = -\mu', \qquad z = -\frac{\rho' x}{\lambda'}.$$

Si $\lambda = \mu'$ et $\lambda' = \mu$, d'où $\rho = \rho'$, on peut passer de l'un des hyperboloïdes H et H′ à l'autre par une rotation d'un angle droit autour de OZ.

Lieu de D *et* Δ. — L'équation du lieu des droites D et Δ, quand λ et μ varient, ρ restant fixe, s'obtient en éliminant λ et μ entre les équations de l'une ou l'autre de ces droites et la condition (3), ce qui donne

$$(D) \qquad x^2(z^2 - y^2) = \rho^2 y^2.$$

Le lieu des droites D′ et Δ′ est de même la surface ayant pour équation

$$(D') \qquad y^2(z^2 - x^2) = \rho^2 x^2.$$

Ces deux surfaces sont symétriques par rapport aux plans bissecteurs des dièdres formés par les plans ZOX, ZOY, ce qui résulte de la position relative des hyperboloïdes des deux familles. Retranchant la seconde équation de la première, nous avons

$$z^2(x^2 - y^2) = \rho^2(y^2 - x^2),$$

d'où il suit que l'intersection des deux surfaces se compose : 1° de OZ, ligne double de chaque surface, qui compte pour quatre droites communes ; 2° de deux courbes imaginaires du quatrième degré contenues dans les plans $z = \pm \rho i$; 3° de deux coniques situées dans les plans $y = \pm x$, et projetées sur le plan ZOX suivant l'hyperbole équilatère

$$(C') \qquad z^2 - x^2 = \rho^2.$$

On déduit de là une génération simple de la surface (D) : (C) désignant l'hyperbole du plan $y = x$ projetée suivant (C′), cette surface est le conoïde droit ayant OX pour axe et (C) pour directrice. La surface (D′) est susceptible d'une génération analogue, en remplaçant OX par OY.

Si $z = h$ est l'équation d'un plan P parallèle à XOY, il coupe les surfaces précédentes suivant des courbes ayant pour projections sur ce dernier plan

$$(d) \qquad x^2(h^2 - y^2) = \rho^2 y^2.$$

$$(d') \qquad y^2(h^2 - x^2) = \rho^2 x^2.$$

Écrivant l'équation de (d) sous la forme

$$y^2 = \frac{h^2}{1 + \frac{\rho^2}{x^2}},$$

nous trouvons pour cette courbe la forme ci-dessous (*fig.* 1) : elle admet les axes pour axes de symétrie,

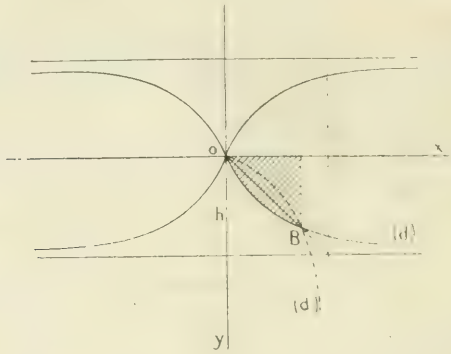


Fig. 1.

les droites $y = \pm h$ pour asymptotes, l'origine pour point double d'inflexion. La courbe (d') est la symétrique de la précédente par rapport à la bissectrice de XOY : les arcs situés dans cet angle se coupent au point B $(\sqrt{h^2 - \rho^2}, \sqrt{h^2 - \rho^2})$.

L'aire hachurée, comprise entre OX, l'arc OB de (d), et l'ordonnée de B, a pour valeur

$$\int_0^{\sqrt{h^2-\rho^2}} y\,dx = \int_0^{\sqrt{h^2-\rho^2}} \frac{h\rho\,dx}{\sqrt{x^2+\rho^2}}$$

$$= \left| h\sqrt{x^2+\rho^2} \right|_0^{\sqrt{h^2-\rho^2}} = h(h-\rho).$$

L'aire comprise entre les arcs OB des deux courbes (d) et (d') vaut

$$2\left[h(h-\rho) - \frac{h^2-\rho^2}{2}\right] = (h-\rho)^2.$$

Le point B n'est réel qu'à partir de $h = \rho$; le volume engendré par cette aire et compris entre les plans de

cote z_1 et z_2 a pour expression

$$\int_{z_1}^{z_2} (h-\rho)^2\,dh = \left[\frac{1}{3}(h-\rho)^3\right]_{z_1}^{z_2}.$$

II. Soient H_1 un hyperboloïde de la première famille

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = 1$$

avec

$$(3) \qquad \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\rho^2} \qquad (\lambda > \mu);$$

les droites correspondantes D_1 et Δ_1 ayant pour équations

$$(D_1) \quad \begin{cases} x = \lambda, \\ z = \dfrac{\rho y}{\mu}; \end{cases} \qquad (\Delta_1) \quad \begin{cases} x = -\lambda, \\ z = -\dfrac{\rho y}{\mu}, \end{cases}$$

et H_2 un hyperboloïde de la seconde famille

$$(H_2) \qquad \frac{x^2}{\lambda'^2} + \frac{y^2}{\mu'^2} - \frac{z^2}{\rho'^2} = 1$$

avec

$$(3)' \qquad \frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\mu'^2} + \frac{1}{\rho'^2} \qquad (\mu' > \lambda'),$$

les droites D_2 et Δ_2 ayant pour équations

$$(D_2) \quad \begin{cases} y = \mu', \\ z = \dfrac{\rho' x}{\lambda'}; \end{cases} \qquad (\Delta_2) \quad \begin{cases} y = -\mu', \\ z = -\dfrac{\rho' x}{\lambda'}. \end{cases}$$

Écrivant que D_1 et D_2 se coupent, nous avons la condition

$$(4) \qquad \frac{\lambda\mu}{\rho} = \frac{\lambda'\mu'}{\rho'}$$

qu'on trouverait également en écrivant que D_1 et Δ_2 se coupent, ou D_2 et Δ_1, ou Δ_1 et Δ_2. Donc à un système

(λ, μ, ρ) correspondent une infinité de systèmes (λ', μ', ρ') satisfaisant aux conditions (3)′ et (4), autrement dit à un H_1 correspondent une infinité de H_2 tels que les droites fixes relatives à H_1 et les droites fixes relatives à chaque H_2 forment un quadrilatère gauche ABCD; H_1 étant supposé fixe, le lieu des droites D_2, Δ_2 relatives à H_2 est le paraboloïde équilatère passant par D_1, Δ_1, et ayant XOZ pour plan directeur (*fig.* 2)

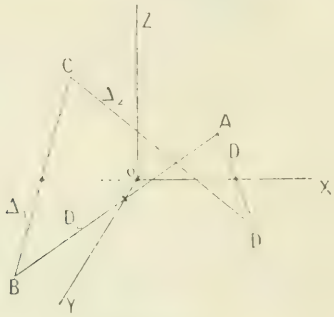


Fig. 2.

Les coordonnées des sommets du quadrilatère gauche ABCD sont :

$$(A)\ \begin{cases} \lambda, \\ \mu', \\ \dfrac{2\mu'}{\mu}; \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} -\lambda, \\ \mu', \\ -\dfrac{2\mu'}{\mu}; \end{cases} \qquad (C)\ \begin{cases} -\lambda, \\ -\mu', \\ \dfrac{2\mu'}{\mu}; \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \lambda, \\ -\mu', \\ \dfrac{2\mu'}{\mu}, \end{cases}$$

avec

$$\frac{\lambda\mu}{\rho} = \frac{\lambda'\mu'}{\rho'}.$$

Les diagonales AC et BD ont pour équations

$$(AC)\ \begin{cases} z = \dfrac{2\mu'}{\mu}, \\ y = \dfrac{\mu' x}{\lambda}; \end{cases} \qquad (BD)\ \begin{cases} z = -\dfrac{2\mu'}{\mu}, \\ y = -\dfrac{\mu' x}{\lambda}. \end{cases}$$

Observons que les relations (3) (3)′, (4) qui lient les paramètres de H_1 et H_2 entraînent la suivante

$$\lambda^2 - \mu^2 = \mu'^2 - \lambda'^2;$$

donc les distances focales des ellipses de gorge de deux tels hyperboloïdes sont égales, et *les ellipses de gorge de tous les* H_2 *correspondant à un même* H_1 *sont homofocales.*

Soit M (x, y, z) un point de l'hyperboloïde H_3 engendré par l'intersection de deux plans rectangulaires passant respectivement par AC et BD; les plans MAC et MBD ont pour équations

$$(\mathrm{MAC}) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ \lambda & \mu' & \frac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \\ -\lambda & -\mu' & \frac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\mathrm{MBD}) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ \lambda & -\mu' & -\frac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \\ -\lambda & \mu' & -\frac{\rho\mu'}{\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de H_3 est la condition de perpendicularité de ces plans, c'est-à-dire

$$(\mathrm{H}_3) \qquad -\mu'^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (\lambda^2 - \mu'^2) z^2 + \frac{\rho^2 \mu'^2}{\mu^2} (\mu'^2 - \lambda^2) = 0.$$

Les équations de H_1 et H_2 étant

$$(\mathrm{H}_1) \qquad -\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \frac{\lambda^2 \mu^2}{\rho^2} z^2 - \lambda^2 \mu^2 = 0,$$

$$(\mathrm{H}_2) \qquad -\mu'^2 x^2 + \lambda'^2 y^2 - \frac{\lambda'^2 \mu'^2}{\rho'^2} z^2 - \lambda'^2 \mu'^2 = 0.$$

un calcul aisé montre que

$$\mu'^2(\lambda^2 - \lambda'^2)(H_1) - \lambda^2(\mu^2 + \mu'^2)(H_2)$$

est identique, à un facteur près, en tenant compte des conditions (3), (3)', (4), au premier membre de l'équation de H_3, ce qui établit que les trois hyperboloïdes appartiennent à un même faisceau ponctuel. On peut s'en rendre compte géométriquement à l'aide du théorème suivant : ABCD *étant un tétraèdre quelconque*, M *un point de l'espace, si les plans* MAB *et* MCD, MBC *et* MDA, *sont rectangulaires, il en est de même des plans* MAC *et* MBD.

Rappelons que les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont deux joints communs, d'où il résulte que le lieu des points de l'espace desquels on voit deux diagonales, et par suite les trois, sous un angle droit, est le cercle ayant pour diamètre le segment qui joint ces deux points, et situé dans un plan perpendiculaire à celui du quadrilatère.

Pour établir que, les plans MAB et MCD étant rectangulaires, ainsi que MBC et MDA, il en est de même des plans MAC et MBD, menons en M des perpendiculaires à ces plans et coupons-les par un plan Π qui les rencontre aux points *ab*, *cd*, ..., *bd*. Les droites M*ab*, M*ac*, M*ad*, perpendiculaires à MA, sont en même plan, et les points *ab*, *ac*, *ad* sont en ligne droite; il en est de même des points *ab*, *bc*, *bd*, des points *ac*, *bc*, *cd* et des points *ad*, *bd*, *cd*, de sorte que ces six points forment un quadrilatère complet.

A cause de l'hypothèse, les angles $(\widehat{ab, M, cd})$ et $(\widehat{bc, M, ad})$ sont droits; par suite, la troisième diagonale est vue aussi de M sous un angle droit, l'angle

$(\widehat{ac, M, bd})$ est droit; les plans MAC et MBD, qui sont perpendiculaires aux côtés de cet angle, sont bien rectangulaires. C. Q. F. D.

Si nous appelons H_2, H_1, H_3 les hyperboloïdes ayant pour droites fondamentales AB et CD, BC et AD, AC et BD, ce théorème montre que tout point commun à deux de ces surfaces appartient à la troisième : ces hyperboloïdes font partie d'un même faisceau ponctuel.

Ainsi *il existe une infinité de points déterminant avec chaque groupe d'arêtes opposées un dièdre droit, et ces points forment une biquadratique gauche.*

Si a est le pied de la hauteur issue de A, les plans ABa, DCa sont rectangulaires, et leur droite commune Ba est une droite de H_2; de même Da, intersection des plans rectangulaires ADa et BCa, est une droite de H_1, et enfin Ca une droite de H_3; même propriété pour les droites analogues relatives aux autres hauteurs du tétraèdre; ainsi H_2 contient les droites Ba, Ab, Cd, Dc; H_1 contient les droites Da, Ad, Bc, Cb; et H_3 les droites Ca, Ac, Db, Bd. Les points a, b, c, d sont bien sur la biquadratique commune aux trois hyperboloïdes.

On peut observer que ces propriétés s'appliquent à un tétraèdre quelconque, et non pas seulement à un tétraèdre à arêtes opposées égales comme celui que forment les droites D_1, Δ_1, D_2, Δ_2.

III. L'hyperboloïde $H_1(\lambda, \mu, \rho)$ de la première famille étant donné, et par suite ses droites fondamentales D_1, Δ_1, tout système de droites D_2, Δ_2, parallèles au plan XOZ, équidistantes de ce plan et s'appuyant sur D_1, Δ_1 et OY, détermine un H_2; donc, par un point A de l'espace, passent autant de H_2 qu'il existe de

systèmes D_2, Δ_2 pour lesquels les plans (A, D_2) et (A, Δ_2) sont rectangulaires.

Soit P le paraboloïde lieu des droites D_2, Δ_2 : le lieu géométrique des milieux des cordes déterminées par P sur des droites issues de A est un paraboloïde homothétique de P, coupant par suite le plan XOZ suivant une droite, de sorte que le lieu des droites l, passant en A, et s'appuyant sur deux droites D_2, Δ_2 équidistantes de ce plan est un plan p. D'autre part, considérons deux droites D'_2, Δ'_2 telles que les plans (A, D'_2), (A, Δ'_2) soient rectangulaires; comme ces plans sont tangents à P, le lieu de leur droite commune l' est un cône de second degré c.

A tout système de droites D_2, Δ_2 coïncidant avec un système D'_2, Δ'_2, c'est-à-dire à toute droite l confondue avec une droite l', correspond un H_2 passant en A, et réciproquement : donc il passe, par tout point de l'espace, deux, un ou zéro hyperboloïde H_2.

Pour que les deux H_2 soient confondus, il faut et il suffit que le plan p (plan focal relatif à A du complexe linéaire formé par les droites coupant P en deux points équidistants du plan ZOX) soit tangent au cône c (cône relatif à A du complexe des droites par lesquelles passent deux plans tangents à P rectangulaires) : le lieu des points satisfaisant à cette condition est une surface S dont nous allons déterminer l'équation.

Les hyperboloïdes H_2 passant par $A(x, y, z)$ sont déterminées par les relations suivantes en λ', μ', ρ' :

$$\frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\mu'^2} + \frac{1}{\rho'^2},$$

$$\frac{\lambda'\mu'}{\rho'} = \frac{\lambda\mu}{\rho},$$

$$\frac{x^2}{\lambda'^2} + \frac{y^2}{\mu'^2} - \frac{z^2}{\rho'^2} = 1.$$

$\frac{1}{\lambda'^2}$ et $-\frac{1}{\mu'^2}$ sont les racines de l'équation

$$u^2 - \frac{1}{\rho'^2} u - \frac{\rho^2}{\lambda^2 \mu^2 \rho'^2} = 0,$$

d'où

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{\lambda'^2} \\ \frac{1}{\mu'^2} \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{2\rho'^2} + \sqrt{\frac{1}{4\rho'^4} + \frac{\rho^2}{\lambda^2 \mu^2 \rho'^2}}.$$

L'équation correspondante en ρ' est

$$\frac{x^2 - y^2}{2\rho'^2} - (x^2 + y^2)\sqrt{\frac{1}{4\rho'^4} + \frac{\rho^2}{\lambda^2 \mu^2 \rho'^2}} - \frac{z^2}{\rho'^2} = 1,$$

qui peut s'écrire

$$4\rho'^4 + 4\left[2z^2 - x^2 + y^2 - \frac{\rho^2(x^2+y^2)^2}{\lambda^2 \mu^2}\right]\rho'^2$$
$$+ (2z^2 - x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0,$$

équation du second degré en ρ'^2; donc il passe bien deux hyperboloïdes H_2 par tout point de l'espace. La surface S sur laquelle doit se trouver le point pour que ces hyperboloïdes soient confondus, a pour équation

$$\left[2z^2 - x^2 + y^2 - \frac{\rho^2(x^2+y^2)^2}{\lambda^2 \mu^2}\right]^2$$
$$- (2z^2 - x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

ou

$$-2(2z^2 - x^2 + y^2)\frac{\rho^2}{\lambda^2 \mu^2} + (x^2 + y^2)^2 \frac{\rho^4}{\lambda^4 \mu^4} - 1 = 0,$$

ou

$$(S) \qquad [\rho^2(x^2 + y^2) + \lambda^2 \mu^2]^2 - 4\lambda^2 \mu^2 \rho^2 (y^2 + z^2) = 0.$$

On verrait de même que, par tout point de l'espace passent deux hyperboloïdes H_3, et que le lieu des points pour lesquels ils sont confondus, est la surface

$$(S') \qquad [\rho^2(x^2 + z^2) + \lambda^2 \mu^2]^2 - 4\lambda^2 \mu^2 \rho^2 (y^2 + z^2) = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente, nous obtenons

$$[\rho^2(x^2+y^2)+\lambda^2\mu^2+\mu^2(x^2+z^2)+\lambda^2\rho^2]$$
$$\times[\rho^2(x^2+y^2)-\lambda^2\mu^2-\mu^2(x^2+z^2)-\lambda^2\rho^2]=0,$$

ce qui montre que l'intersection des surfaces S et S′ se compose de deux parties : une courbe imaginaire et une courbe C appartenant à la quadrique

$$\rho^2(x^2+y^2)-\lambda^2\mu^2-\mu^2(x^2+z^2)-\lambda^2\rho^2=0.$$

En tenant compte de la condition $\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\rho^2}$, on reconnaît l'équation de H_1, de sorte que C appartient à cet hyperboloïde.

IV. L'équation de la projection Γ, sur le plan XOY, de la courbe C, s'obtient en éliminant z^2 entre l'équation ci-dessus, et celle de S, ce qui donne

$$[\rho^2(x^2+y^2)-\lambda^2\mu^2]^2$$
$$-4\lambda^2\mu^2\rho^2\left[y^2-\frac{\rho^2(x^2+y^2)-\mu^2x^2-\lambda^2(\mu^2-\rho^2)}{\rho^2}\right]=0.$$

En substituant à ρ^2 sa valeur $\frac{\lambda^2\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}$ dans cette équation, on peut la mettre sous la forme

$$(\Gamma)\quad (x^2+y^2)^2$$
$$+2[(\lambda^2-3\mu^2)x^2+(\mu^2-3\lambda^2)y^2]+(\lambda^2+\mu^2)^2=0,$$

qui représente une quartique bicirculaire qui a les axes de coordonnées pour axes de symétrie ; montrons qu'elle admet deux anallagmaties.

On sait que l'enveloppe d'un cercle mobile

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\delta=0$$

qui coupe orthogonalement le cercle fixe

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_0 x - 2\beta_0 y + 2\delta_0 = 0 \qquad (2\delta_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 - R_0^2)$$

et dont le centre décrit la conique qui a pour équation tangentielle

$$F(u, v, w) = 0$$

a pour équation

$$F\left(x - \alpha_0, y - \beta_0, \delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0.$$

Dans le cas actuel, la conique déférente a une équation de la forme

$$A u^2 + A' v^2 - w^2 = 0,$$

ce qui donne pour l'enveloppe

$$A(x - \alpha_0)^2 + A'(y - \beta_0)^2 - \left(\delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(A + \delta_0)x^2 - 4(A' + \delta_0)y^2$$
$$+ 8A\alpha_0 x + 8A'\beta_0 y + 4(\delta_0^2 - A\alpha_0^2 - A'\beta_0^2) = 0.$$

En identifiant cette équation avec celle de Γ, on obtient

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0,$$
$$4\delta_0^2 \quad \text{ou} \quad R_0^4 = (\lambda^2 + \mu^2)^2,$$
$$-2(A + \delta_0) = \lambda^2 - 3\mu^2,$$
$$-2(A' + \delta_0) = \mu^2 - 3\lambda^2.$$

On en conclut :

1° $\qquad R_0^2 = \lambda^2 + \mu^2, \qquad A = 2\mu^2, \qquad A' = 2\lambda^2.$

La déférente est l'ellipse

$$2\mu^2 u^2 + 2\lambda^2 v^2 - w^2 = 0$$

ou

$$(\delta) \qquad \frac{x^2}{2\mu^2} + \frac{y^2}{2\lambda^2} - 1 = 0.$$

et le cercle fixe

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

2° $R_0^2 = -(\lambda^2 + \mu^2), \qquad A = \mu^2 - \lambda^2, \qquad A' = \lambda^2 - \mu^2.$

La déférente est l'hyperbole équilatère

$$(\mu^2 - \lambda^2)(u^2 - v^2) - w^2 = 0$$

ou

$$(\delta') \qquad x^2 - y^2 + \lambda^2 - \mu^2 = 0$$

et le cercle fixe

$$x^2 + y^2 = -(\lambda^2 + \mu^2).$$

L'équation de Γ en coordonnées polaires étant

$$r^4 + 2[(\lambda^2 - 3\mu^2)\cos^2\omega + (\mu^2 - 3\lambda^2)\sin^2\omega]r^2 + (\lambda^2 + \mu^2)^2 = 0,$$

une droite passant par l'origine coupe cette courbe en quatre points symétriques deux à deux par rapport à l'origine : $A(r')$, $A'(-r')$, $B(r'')$, $B'(-r'')$, les rayons vecteurs r' et r'' de A et B étant supposés positifs ; le milieu M de AB a pour rayon vecteur $\frac{r' + r''}{2}$, et comme

$$\begin{aligned}(r' + r'')^2 &= r'^2 + r''^2 + 2r'r'' \\ &= -2[(\lambda^2 - 3\mu^2)\cos^2\omega + (\mu^2 - 3\lambda^2)\sin^2\omega] \\ &\quad + 2(\lambda^2 + \mu^2) \\ &= 8(\lambda^2\sin^2\omega + \mu^2\cos^2\omega),\end{aligned}$$

l'équation du lieu du milieu de AB, et aussi du milieu de A′B′, est

$$r^2 = 2(\lambda^2\sin^2\omega + \mu^2\cos^2\mu)$$

ou

$$(\gamma) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2(\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2).$$

Le milieu M′ de AB′ a de même pour rayon vec-

teur $\frac{r' - r''}{2}$, et comme

$$\begin{aligned}(r' - r'')^2 &= -2[(\lambda^2 - 3\mu^2)\cos^2\omega + (\mu^2 - 3\lambda^2)\sin^2\omega] \\ &\quad - 2(\lambda^2 + \mu^2) \\ &= -4(\lambda^2 + \mu^2)(\cos^2\omega - \sin^2\omega),\end{aligned}$$

l'équation du lieu du milieu de AB′, et du milieu de A′B, est

$$r^2 = -(\lambda^2 - \mu^2)(\cos^2\omega - \sin^2\omega)$$

ou

$$(\gamma') \qquad (x^2 + y^2)^2 = (\lambda^2 - \mu^2)(y^2 - x^2).$$

Ces deux courbes sont, comme Γ, des quartiques bicirculaires dont chacune admet deux symétries et deux anallagmaties.

La première (γ), qui a un point double isolé à l'origine, est la podaire de ce point par rapport à l'ellipse (δ), déférente de Γ, comme il résulte des propriétés des anallagmatiques, et aussi l'inverse de l'ellipse

$$\frac{x^2}{2\lambda^2} + \frac{y^2}{2\mu^2} - 1 = 0$$

par rapport à l'origine, la puissance d'inversion étant $2\lambda\mu$.

La deuxième (γ'), qui a en O un point double à tangentes rectangulaires, est la podaire de ce point par rapport à l'autre déférente (δ'), et aussi l'inverse de cette hyperbole équilatère par rapport à l'origine, la puissance d'inversion étant $(\lambda^2 - \mu^2)$: c'est une lemniscate de Bernoulli dont les sommets appartiennent à l'axe non focal de l'ellipse de gorge de H_1, leur distance étant égale à la distance focale de cette ellipse.

CORRESPONDANCE.

M. **J. Pál**. — *Au sujet d'un article récent de M. R. Bricard* (1914, p. 19). — La question traitée dans cet article a déjà fait l'objet des deux Mémoires suivants de M. H. Jung :

1° *Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur umschliesst* (*Journal de Crelle*, t. 129, 1901, p. 241-257).

2° *Ueber den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur umschliesst* (*Journal de Crelle*, t. 137, 1910, p. 310-313).

Je me suis occupé de mon côté du théorème qui concerne les ensembles plans, et voici la démonstration à laquelle je suis arrivé, il y a quelques années :

Soit M un ensemble de points situés dans le plan. Soit E l'élongation de l'ensemble. Je dis qu'il existe un cercle de rayon au plus égal à $\frac{E}{\sqrt{3}}$ renfermant tout l'ensemble.

Tout d'abord, on peut supposer que l'ensemble est fermé. On démontre d'une manière élémentaire qu'il existe un cercle de rayon minimum (et un seul qui renferme l'ensemble). Soient K_0 ce cercle, C_0 son centre et ρ_0 son rayon. On veut démontrer qu'on a $\rho_0 \leqq \frac{E}{\sqrt{3}}$.

M étant fermé, la périphérie de K_0 contient des points de M qui forment un ensemble fermé m. Soit $e \leqq E$ l'élongation de m. Il existe alors deux points de m, A et A′, tels que leur distance $AA' = e \leqq E$.

Supposons $\rho_0 > \frac{E}{\sqrt{3}}$. Alors l'angle $\widehat{AC_0A'}$ est plus petit que 120° ; par conséquent, P′ étant un point arbitraire sur le plus grand des arcs AA′, on a $\widehat{APA'} < 60°$. Mais alors, AP ou A′P est plus grand que AA′ ; donc P n'est pas un point de m (AA′ étant égal à l'élongation de m) ; on trouve ainsi que l'ensemble m est situé sur le plus petit des arcs AA′.

Menons une corde BB′ parallèle à AA′, entre AA′ et C_0. M étant fermé, aux environs du plus grand des arcs BB′, il n'existe pas de points de M. Par suite, si C_1 est assez voisin de C_0 et situé à la même distance $\rho_1 < \rho_0$ de B et de B′, le cercle de centre C_1 passant par B, contiendra l'ensemble M. C'est une contradiction, parce que ρ_0 est le rayon le plus petit possible.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Grenoble.

Épreuve théorique. — *On considère une verticale* ascendante Oy *et une horizontale* Ox *qui la rencontre; soit* M *un point matériel de masse* m, *de coordonnées* (x, y), *situé dans le plan* xOy. *Ce point est* pesant; *il est en outre* repoussé *par chaque élément* P *de la verticale* Oy *avec une force qui est* proportionnelle *à la masse* m, *à la masse de l'élément* P, *est* inversement proportionnelle à la 4ᵉ puissance de la distance PM.

On demande :

1° *Quelles sont les projections sur* Ox *et sur* Oy *de la résultante des forces appliquées au point* M ?

2° *Écrire les équations du mouvement du point* M *sous l'action de ces forces, et intégrer ces équations sachant que la vitesse initiale du point* M *est contenue dans le plan* xOy.

3° *Étudier sommairement les divers mouvements possibles; en particulier tracer approximativement les diverses formes que peut affecter la trajectoire suivant les conditions initiales. On montrera que cette trajectoire ne peut jamais rencontrer la verticale* Oy.

4° *Étudier plus particulièrement le mouvement lorsque la vitesse initiale du point* M *est verticale; on distinguera le cas où elle est dirigée vers le haut et le cas où elle est dirigée vers le bas; on précisera dans ces deux cas la forme de la trajectoire en étudiant sa concavité.*

5° *On peut toujours supposer qu'on a choisi* Ox *passant par la position initiale du point* M. *Dans le cas ou la vitesse initiale est* verticale ascendante, *la trajectoire coupe alors* Ox *en un deuxième point.*

Calculer l'aire limitée par Ox, *entre les deux points, et la trajectoire du point* M *en supposant*

$$v_0 = g, \qquad x_0 = 2\,\mathrm{K} = 1.$$

Épreuve pratique. — *Calculer les racines de l'équation*

$$3x^4 + 22x^3 + 63x^2 + 34x - 24 = 0$$

avec une erreur inférieure ou au plus égale à $\frac{1}{10^4}$.

(Juillet 1913.)

Epreuve théorique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}\,y + \frac{1}{1+x^3} = 0.$$

Former l'équation de la courbe intégrale qui passe par l'origine des coordonnées, et construire cette courbe pour les valeurs de x *comprises entre* 0 *et* 1.

Former les quatre premiers termes (c'est-à-dire les termes de degré 0, 1, 2, 3) *du développement en série de Mac-Laurin pour l'intégrale précédente, et en déduire la forme de la courbe dans le voisinage de l'origine des coordonnées.*

Épreuve pratique. — *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la racine positive de l'équation*

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18 = 0.$$

1° *Centre de gravité de la portion de l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

situé au-dessus du plan $z = 0$. (Novembre 1913.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. Question de cours. — *Composition des mouvements vibratoires rectilignes de même période parallèles. Interférence.*

II. Problèmes. — 1° *Trouver le lieu géométrique du milieu d'un segment de longueur donnée dont les extrémités se déplacent sur un cercle de rayon r et sur un diamètre fixe de ce cercle.*

Indiquer quelle doit être la longueur donnée pour que le lieu soit la courbe (Γ) *représentée par l'équation*

$$x^4 + 10x^2y^2 + 9y^4 - 4r^2x^2 = 0,$$

le diamètre fixe étant pris pour axe des abscisses et le diamètre perpendiculaire pour axe des ordonnées.

Construire la courbe (Γ), *calculer l'aire de la région du plan qu'elle limite.*

2° *Étant donnés, dans un plan, un pôle* O *et un axe polaire* Ox, *trouver toutes les courbes telles que l'aire du triangle curviligne limité par l'axe polaire, un arc de la courbe et un rayon vecteur quelconque soit proportionnelle à la longueur de l'arc de la courbe.*

Épreuve pratique. — I. Géométrie analytique. — x *variant de* 0 *à* π, *on considère la courbe représentée par l'équation*

$$y = e^{-x\sqrt{2}} \sin x.$$

1° *Calculer le maximum de* y.

Soit A *le point correspondant de la courbe. Calculer le rayon de courbure en ce point.*

2° *Soit* B *le point d'abscisse* π. *Calculer en degrés et minutes l'angle que fait en ce point la tangente à la courbe avec l'axe des* x.

3° *Calculer l'aire limitée par l'arc* AB, *la verticale du point* A *et l'axe* Ox.

4° *Déterminer les coordonnées du point d'inflexion.*

II. Mécanique. — *Pendule composé dont l'axe de suspension n'est pas horizontal. Un corps solide est pesant et*

mobile autour d'un axe qui fait avec le plan horizontal l'angle $i\left(0 < i < \frac{\pi}{2}\right)$. *Donner l'équation différentielle du mouvement : on déterminera la position du solide par l'angle* θ, *compté algébriquement, de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe de rotation avec celle de ses positions où elle a la plus grande pente et est dirigée vers le bas. Positions d'équilibre du solide. Montrer qu'il existe un pendule simple oscillant dans un plan vertical et synchrone du pendule composé considéré. Comment change la durée des oscillations infiniment petites d'un pendule composé, si on le fait osciller successivement autour du même axe (par rapport à lui) placé d'abord horizontalement, puis faisant l'angle* i *avec le plan horizontal?* (Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — I. Problèmes. — 1° *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *construire les projections sur les plans de coordonnées de la courbe* (Γ) *représentée par les équations*

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \frac{K}{2}\left(e^{\frac{r\varphi}{K}} - e^{-\frac{r\varphi}{K}}\right),$$

où r, K, φ *désignent deux longueurs données et un angle variable.*

Rectifier la courbe (Γ).

Montrer que les tangentes à (Γ) *touchent une sphère de centre* O.

2° *Dans un plan rapporté a un pôle* O *et à un axe polaire* Ox, *construire la courbe* (C) *représentée par l'équation*

$$\rho = a^{\operatorname{tang}\omega},$$

ω *et* ρ *désignant l'angle polaire et le rayon vecteur d'un point,* a *étant une longueur donnée.*

Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de la famille de courbes engendrée par (C) *quand* a *varie.*

II. Question de cours. — *Définir le mouvement hélicoïdal uniforme d'un corps solide par application de la composition des mouvements.*

Épreuve pratique. — I. *Un point matériel* M, *de masse* m, *est soumis à l'action de la pesanteur, qui lui imprime l'accélération* g, *et d'autre part à une attraction issue d'un point fixe* O, *constante et égale en valeur absolue à* mg.

Démontrer que la résultante de ces deux forces dérive d'une fonction de forces. Définir géométriquement les surfaces de niveau.

Le point M *est soumis aux deux forces précédentes et assujetti à se mouvoir sans frottement sur une droite horizontale* Ox *passant par le point* O. *On le place en un certain point* M_0 *de* Ox, *et on le lance avec une certaine vitesse, vers le point* O *ou dans la direction opposée. Quel est le mouvement du point* M *jusqu'à ce qu'il atteigne le point* O? *Calculer la réaction de la droite* Ox.

II. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$$

(Novembre 1913.)

Lyon.

Épreuve écrite. — *On donne trois axes rectangulaires et la surface* (P) *qui, rapportée à ces axes, a pour équation*

$$z = x^2 + y^2.$$

On porte sur Ox *une longueur* OA *égale à l'unité et l'on considère le cylindre* (C) *dont les génératrices sont parallèles à* Oz *et dont la base, dans le plan* xOy, *est le cercle de diamètre* OA :

1° *Montrer que les surfaces* (P) *et* (C) *se coupent suivant une ellipse dont on calculera la surface.*

2° *Trouver le volume* V *du solide limité par le cylindre* (C), *le plan* $z = 0$ *et la surface* (P).

3° *Calculer la portion de la surface du cylindre* (C) *limitée par le plan* $z = 0$ *et la surface* (P).

4° *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) dx - 2y^2\, dy$$

prise le long du cercle de base du cylindre (C). *Pour quelle raison la valeur absolue de cette intégrale est-elle égale au volume* V *demandé dans* 2°?

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2(1+x^2)^2y'' = 2.$$

2° *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = \mathrm{L}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) + 3x \operatorname{arc\,tang} x.$$

3° *Asymptotes de cette courbe.*

4° *Calculer des valeurs approchées à* $\frac{1}{10}$ *près des abscisses des points où cette courbe coupe* Ox.

(Juillet 1913.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. 1° *Intégrer l'équation*

$$x^2y'' - y'^2 = 0.$$

2° *Trouver toutes les courbes intégrales telles que, pour* $x = 1$, *on ait* $y' = 1$ *ou* $y' = -1$.

3° *Forme de ces courbes.*

4° *Soit* $y = f(x)$ *l'équation de la courbe intégrale qui passe par l'origine et qui est tangente en ce point à l'axe des* x. *Déterminer une constante* a *telle que*

$$\frac{f(x) - ax^3}{x^3}$$

ait une limite finie lorsque x *tend vers zéro. Valeur de cette limite.*

II. *Discuter l'équation*

$$2x - \mathrm{L}\,|2x - 1| = 0$$

et calculer ses racines à $\frac{1}{10}$ *près.*

Mécanique. — *Comment parvient-on à énoncer le principe de la conservation de l'énergie. Systèmes auxquels s'applique ce principe.*

Exercice. — *Un point matériel* M *de masse* m *est repoussé*

par un centre fixe O *suivant une force dont l'intensité a pour expression* $\frac{mK^2}{r^3}$, *où* K *est une constante réelle donnée. On demande de trouver la trajectoire, en supposant qu'à l'origine du mouvement la vitesse* v_0 *est perpendiculaire au rayon vecteur initial* $OM_0 = r_0$ *et que l'on a de plus* $K^2 = 3r_0^2 v_0^2$. *Si le temps le permet on examinera de plus près la courbe trajectoire.*

Épreuve pratique. — I. *Soient* A *et* B *deux points qui, par rapport à trois axes rectangulaires, ont respectivement pour coordonnées :* $x = 1, y = 0, z = 0$ *et* $x = 1, y = 1, z = 0$. *Trouver le volume du solide limité par le plan* $z = 0$, *la surface* $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$ *et le prisme droit qui a pour base le triangle* OAB.

Les candidats traiteront la question successivement par les différentes méthodes qu'ils connaissent.

II. *Calculer les intégrales*

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

(Novembre 1913.)

Marseille.

Épreuve écrite. — 1° *Construire la lemniscate* $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$. *Calculer : l'angle* V *que fait la tangente à la courbe avec le rayon vecteur qui va au point de contact; — l'angle* α *que fait cette tangente avec l'axe polaire; — l'angle* θ *que fait la normale à la courbe avec le même axe polaire; — l'angle polaire* ω *étant pris pour terme de comparaison.*

2° *Calculer, avec* ω *variable indépendante, la différentielle* ds *de l'arc de la courbe, la comparer à* $d\alpha$ *et en conclure le rayon de courbure en un point en fonction du rayon vecteur* ρ.

3° *Calculer l'aire d'un secteur de lemniscate, en particulier d'une boucle.*

4° *Enfin, on fait tourner la lemniscate autour de l'axe qui passe par ses sommets. Calculer les rayons de courbure des sections normales principales en un point de la surface de révolution obtenue.*

SOLUTION.

ρ diminuant quand ω varie de ω à $\frac{\pi}{4}$, l'angle aigu V de la tangente avec le rayon vecteur est déterminé par la formule $\operatorname{tang} V = -\frac{\rho}{\rho'}$. On obtient $\frac{\rho'}{\rho}$ par une dérivation logarithmique et l'on a $V = \frac{\pi}{2} - 2\omega$. On voit ensuite que l'on a $\alpha = 3\omega - \frac{\pi}{2}$ et enfin $\theta = 3\omega$, résultat remarquable.

Des formules

$$ds = \frac{a\,d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} \qquad \text{et} \qquad d\alpha = 3\,d\omega$$

on tire de suite

$$R = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{\rho}.$$

Pour le secteur, on a

$$u = \frac{1}{4}\,a^2 \sin 2\omega,$$

ω *partant de zéro.*

La section principale qui touche le parallèle de la surface de révolution a pour rayon

$$R_1 = \frac{\rho \sin\omega}{\sin 3\omega}.$$

(Octobre 1913.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point pesant* M *est assujetti à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical de rayon* R. *Il est repoussé par une force perpendiculaire à la tangente* AB *proportionnellement à la distance de* M *à* AB.

La répulsion à la distance R *est égale au poids du point.*

Trouver les positions d'équilibre en donnant numériquement la tangente de la moitié de l'angle θ *que fait le rayon* OM *avec la verticale, et marquer sur la figure ces positions d'équilibre.*

Dire si elles sont stables ou instables.

SOLUTION.

La projection des forces $mg(1+\sin\theta)$ et mg sur la tangente au cercle donne une somme algébrique

$$T = mg(1+\sin\theta)\cos\theta - mg\sin\theta.$$

Dans le cas de l'équilibre, T est nulle et l'on a

$$1+\sin\theta = \operatorname{tang}\theta.$$

En posant $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = t$, on est conduit à résoudre numériquement l'équation

$$t^4 + 4t^3 - 1 = 0.$$

Il y a une racine positive

$$t_1 = 0,62 = \operatorname{tang} 31^\circ 48'$$

et une racine négative

$$t_2 = -4,01 = \operatorname{tang}(-75^\circ),$$

ce qui donne

$$\theta_1 = 63^\circ 36' \quad \text{et} \quad \theta_2 = -150^\circ$$

et correspond à deux positions presque opposées sur le cercle.

La dérivée $T' = mg(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin\theta)$ est manifestement négative pour un angle voisin de 60°, il en résulte que T varie en sens inverse de θ dans le voisinage de l'équilibre θ_1 qui est par suite stable. L'autre équilibre θ_2 est forcément instable; on peut d'ailleurs le vérifier par la considération de la dérivée T'. (Novembre 1913.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Les axes étant rectangulaires, on donne la parabole représentée par l'équation*

$$y^2 = 2px.$$

En un point (x, y) *de la parabole on mène la tangente, et une droite* D *symétrique de la tangente, par rapport à la parallèle à l'axe* OX *qui passe par* M.

1° *Déterminer les coordonnées du point* M′ *où la droite* D *rencontre la parabole.*

2° *Déterminer les coordonnées du point* C, *milieu de* MM′, *et trouver le lieu du point* C, *quand le point* M *décrit la parabole.*

3° *Trouver l'enveloppe d'une droite* CN, *passant par* C, *et parallèle à la tangente en* M *à la parabole.*

4° N *étant le point de contact de la droite* CN *avec son enveloppe, démontrer que la droite* NM *passe par le sommet* O *de la parabole.*

Épreuve pratique. — *Une courbe* C *est représentée, en coordonnées polaires, par l'équation*

$$\rho^2 = a^2 \frac{1 + \cos^2 \omega}{2}.$$

Montrer que cette courbe est fermée et intérieure à la circonférence du centre O *et de rayon* a.

Une sphère de rayon a *a pour centre l'origine. Calculer l'aire de la portion de la sphère située au-dessus du plan* xOy, *qui se projette, sur ce plan* xOy, *à l'intérieur de la courbe* C. (Juin 1913.)

Épreuve écrite. — *Une courbe* C *est représentée, par rapport à trois axes rectangulaires, par les équations*

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3,$$

où t *est un paramètre variable.*

1° *Former les équations de la tangente en un point quelconque* M *de la courbe et déterminer les points* A *et* B *où cette tangente rencontre les plans* xOy *et* xOz.

2° *Montrer que le rapport* $\frac{MA}{MB}$ *est constant, et trouver le lieu du point* A, *et celui du point* B, *lorsque* M *décrit la courbe* C.

3° *Calculer la longueur de l'arc* OM *de la courbe* C.

4° *Du point* M *de la courbe* C *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur le plan* xOy, *et l'on porte sur* MP, *dans le sens de* M *vers* P, *une longueur* MQ *égale à l'arc* OM. *Trouver le lieu du point* Q.

Epreuve pratique. — 1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle du troisième ordre*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} = 2y = 2\sin x + \cos x - 2x - 3.$$

2° *Déterminer une intégrale particulière qui représente une courbe passant par l'origine, tangente en* O *à l'axe* Ox, *et pour laquelle ce point* O *est un point d'inflexion.*

(Novembre 1913.)

Nancy.

Première Partie : Analyse. — I. *Intégration de l'équation linéaire du premier ordre par la méthode de variation des constantes; donner un exemple.*

II. *Soient* Ox *et* Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires et* C *une courbe tracée dans l'angle positif de ces axes. On désigne par* P *le pied de l'ordonnée d'un point quelconque* M *de cette courbe, par* T *le point de rencontre de la tangente en* M *avec l'axe* Ox *et l'on suppose* OT > OP.

1° *Déterminer les courbes* C *pour lesquelles l'aire comprise entre l'axe* Ox, *la courbe* C, *l'axe* Oy *et l'ordonnée* PM *est égale à l'aire du triangle* PMT. *Construire les courbes* C.

2° *Démontrer que les deux aires précédentes, supposées homogènes, ont par rapport à l'axe* Oy *des moments d'inertie dont le rapport est constant quel que soit le point* M *sur une quelconque des courbes* C.

Deuxième Partie : Mécanique. — *On donne un système d'axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *l'axe* Oz *étant dirigé suivant la verticale ascendante, et l'on considère la surface représentée dans ce système d'axes par l'équation*

$$\frac{z}{h} = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

où h *désigne une constante :*

1° *Trouver la projection sur le plan* xOy *du lieu des points de cette surface où le plan tangent est parallèle à*

la droite d'équations

$$x = az, \qquad y = bz.$$

2° *Sur cette surface se déplace sans frottement un point matériel* A, *de masse m, soumis d'une part à l'action de la pesanteur, d'autre part à celle d'une force* F, *parallèle au plan* xOy, *et variable avec la position du point* A. *Comment doit être choisie cette force* F *pour que le point soit en équilibre sur la surface dans une position quelconque? Quel est le moment de* F *par rapport à* Oz?

3° *Calculer le travail de la force* F *lorsque le point* A *passe d'une position* A_0 *à une position* A_1 *en restant sur la surface.* (Juin 1912.)

Première Partie. — 1° *Conditions pour que*

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

soit une différentielle totale exacte. Lorsque les conditions sont satisfaites, calculer l'intégrale indéfinie de cette différentielle.

Soient C *une courbe rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et* MN *la normale en un point quelconque* M, *limitée à son point de rencontre* N *avec* Ox.

1° *Déterminer les courbes* C *pour lesquelles on a*

$$MN = m.OM,$$

m étant une constante donnée.

2° *Tracer une des courbes intégrales correspondant à* $m = 2$ *en utilisant les expressions de* x *et* $\frac{y^2}{x^2}$ *en fonction d'un même paramètre.*

Deuxième Partie. — *On considère les droites représentées par les équations*

$$(1) \qquad \begin{cases} x = az - p, \\ y = a^2 z + 4ap, \end{cases}$$

où a *est un paramètre variable et* p *une fonction de* a :

1° *Comment doit-on choisir cette fonction* p *pour que ces droites aient une enveloppe? Déterminer l'arête de rebroussement.*

2° *Un point matériel, de masse m, se déplace sans frottement sur une quelconque des droites représentées par les équations* (1), *les composantes de la force qui le sollicite étant*

$$X = \frac{y}{z^2}, \qquad Y = \frac{x}{z^2}, \qquad Z = -\frac{2xy}{z^3}.$$

Déterminer les positions d'équilibre du point sur la droite. Écrire l'équation de son mouvement en utilisant le théorème des forces vives. (Octobre 1912.)

Calcul différentiel et intégral. — I. Question de cours : *Calcul d'une intégrale double en coordonnées polaires.*

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on considère la courbe du plan* xOy *dont l'équation est*

$$\frac{1}{\rho} = 1 + \cos\frac{\theta}{2},$$

en prenant Ox *comme axe polaire, et l'on désigne par* C *la partie de cette courbe en forme de boucle, obtenue en faisant varier* θ *de* $-\pi$ *à* $+\pi$. *Trouver, en partant de la notion d'intégrale double, l'aire du cône dont le sommet est le point de l'axe* Oz *de coordonnées* $(0, 0, 2\sqrt{3})$ *et dont la base est la boucle* C.

Géométrie et Mécanique. — *Les axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires et* Oz *étant la verticale ascendante, on considère le paraboloïde de révolution représenté par l'équation*

$$2z = x^2 + y^2.$$

1° *Déterminer sur cette surface une courbe* C *telle que la tangente en chacun de ses points fasse un angle constant égal à* $\frac{\pi}{4}$ *avec la tangente au parallèle en ce point. On déterminera l'équation en coordonnées polaires de la projection de cette courbe sur le plan* xOy.

2° *Un point matériel pesant, de masse m, est assujetti à se mouvoir sans frottement sur la surface du paraboloïde et est soumis à l'action de la pesanteur et à celle d'une*

force normale à l'axe du paraboloïde fonction seulement de la distance du point à l'axe. Comment doit être choisie cette force pour que la trajectoire du point sur le paraboloïde soit la courbe C? *Quelle est la loi du mouvement?*

(Juin 1913.)

Calcul différentiel et intégral. — 1° *Trouver les solutions de l'équation différentielle*

$$2xy\frac{dy}{dx} = K(x^2 + y^2).$$

Examiner si l'intégrale générale est donnée par la même formule pour toutes les valeurs de la constante K.

2° *Les axes* Ox, Oy *étant rectangulaires, tracer la famille des courbes intégrales pour* $K = 2$. *Préciser la forme de ces courbes en déterminant les tangentes d'inflexion et traçant la courbe lieu des points d'inflexion.*

3° *Montrer que les sous-normales menées aux diverses courbes intégrales* ($K \neq 2$ *ou* $= 2$) *en leurs points d'intersection avec un cercle donné et tangent à l'origine à l'axe* Oy *ont une même valeur.*

Géométrie. — *Trouver la condition pour que des droites de l'espace représentées par les équations*

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où a, b, p, q, *sont fonctions d'un même paramètre* t, *aient une enveloppe.*

Mécanique. — *Un point matériel, de masse* m, *est assujetti à se déplacer sans frottement sur une droite d'équations*

$$x = z\sqrt{3}, \qquad y = 2z\sqrt{3};$$

il est soumis à l'action de plusieurs forces dont la résultante a pour projections sur les axes de coordonnées

$$X = -Kmy, \qquad Y = -Kmx, \qquad Z = -mg.$$

Trouver la position d'équilibre de ce point et étudier son mouvement.

(Octobre 1913.)

Paris.

Analyse et Géométrie analytique. — I. *Vérifier que les fonctions x et y de la variable indépendante t qui sont définies par les équations*

$$(1) \qquad x = a\cos^3 t, \qquad y = a(\sin^3 t - 3\sin t),$$

où a désigne une longueur constante donnée, satisfont au système d'équations différentielles

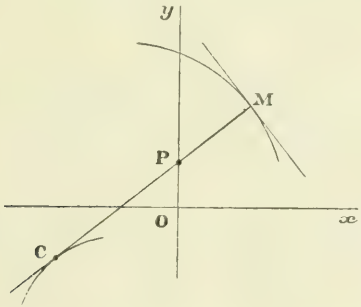
$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} - 3y = 6a\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} + 3x = 0.$$

II. *Montrer qu'on retrouve les fonctions* (1) *en intégrant le système* (2) *avec les conditions initiales*

$$x = a, \qquad y = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

III. *Construire la courbe représentée par les équations* (1), *x et y désignant des coordonnées rectangulaires.*

IV. *Trouver toutes les courbes dont chaque rayon de*



courbure MC *est coupé par l'axe* Oy *au tiers de ce rayon de courbure à partir de son pied* M (MC = 3MP). *Comment ces courbes se déduisent-elles de la courbe* (1)?

Mécanique. — *Un point matériel* M *non pesant, de masse m, est mobile sans frottement sur un plan* P *dans lequel on a fixé deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Le*

point M *est soumis à une force* F *dont les composantes sur les axes* Ox *et* Oy *sont respectivement*

$$X = my, \qquad Y = mx.$$

1° *Existe-t-il une fonction de forces? Et, s'il en est ainsi, la donner ainsi que les courbes de niveau.*

2° *Former et intégrer l'équation différentielle des lignes de force. Montrer qu'on obtient les lignes de force en faisant tourner les courbes de niveau d'un certain angle autour de* Q.

3° *Écrire les équations différentielles du mouvement du point* M *sous l'action de* F. *Donner l'intégrale générale de ces équations.*

4° *Les conditions initiales étant*

$$x_0 = -1, \qquad y_0 = 1, \qquad \frac{dx_0}{dt} = +1, \qquad \frac{dy_0}{dt} = -1.$$

montrer que la trajectoire est rectiligne et que le mouvement du point M *est périodique.*

Quelle est la période de ce mouvement?

Épreuve pratique. — *Soit* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 105x + 200$.

1° *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *a trois racines réelles.*

2° *Calculer les valeurs de* $f(x)$ *pour les valeurs croissantes de* x *à partir de* $x = 7$, *de dixièmes en dixièmes, jusqu'à ce qu'on trouve un résultat positif.*

3° *Calculer, à un millième près, la racine comprise entre* 7 *et* 8.

Nota. — *Les candidats auront à leur disposition des feuilles de papier quadrillé, mais toute méthode de calcul de la racine demandée est admise.* (Juillet 1913.)

Composition d'Analyse. — I. 1° *Trouver les deux fonctions de* x *qui satisfont à l'équation différentielle*

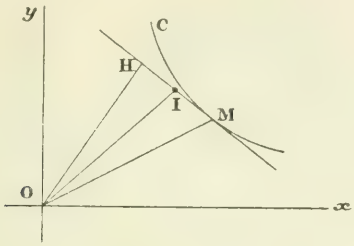
$$y'' + 2y' + 4y = 7e^x - 4x - 6$$

et aux conditions initiales

$$y = 0, \qquad y' = \pm 1 \qquad \text{pour} \qquad x = 0.$$

2° *Développer en série entière la différence de ces deux fonctions.*

II. *Étant donnés, dans un plan, deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère les courbes* (C) *de ce plan qui possèdent la propriété suivante :* M *étant un point quel-*



conque de la courbe, et H *la projection de* O *sur la tangente en* M *à la courbe, la médiane* OI *du triangle* OMH *a une longueur constante donnée* a.

1° *Former l'équation différentielle* (E) *qui lie les coordonnées* x, y *d'un point quelconque d'une courbe* (C).

2° *Montrer que, si l'on passe en coordonnées polaires* ρ, ω *d'origine* O *et d'axe polaire* Ox, *l'équation différentielle* (E) *devient l'équation* (E')

$$3\rho^4\, d\omega^2 + (\rho^2 - 4a^2)(d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2) = 0.$$

3° *Intégrer cette dernière équation différentielle, en se servant du changement de variable* $\rho^2 = a^2 u$.

4° *Déduire de l'équation* (E), *indépendamment de toute intégration, que, si une courbe* (C) *ne se réduit pas à un cercle de centre* O, *son rayon de courbure en* M, *est égal à* 3OH.

5° *Montrer que l'équation générale des courbes* (C) *peut s'écrire, en désignant par* β *une constante arbitraire,*

$$\left(\frac{2a}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^{\frac{2}{3}}(\omega - \beta) = \cos^{\frac{2}{3}}(\omega - \beta).$$

En conclure la forme des courbes C.

MÉCANIQUE. — *Un point matériel* M, *de masse* $m = 1$,

non pesant, situé dans le plan xOy, est soumis à l'action d'une force $\vec{F}$ dont les composantes par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy sont respectivement

$$X = 1 - \frac{y^2}{x^2}, \qquad Y = \frac{2y}{x}.$$

1° *Trouver l'équation des lignes de force du champ créé par $\vec{F}$ et construire ces lignes.*

2° *Existe-t-il une fonction de forces? S'il en est ainsi, la déterminer et construire les lignes de niveau.*

3° *On imagine que le point M est assujetti à se mouvoir dans un tube de section infiniment petite dirigé suivant la droite $y = x + 1$. Le mouvement a lieu sans frottement; à l'origine des temps le mobile est lancé du point A d'abscisse $x = 1$ avec une vitesse dont la composante initiale est $x'_0 = -(1 - \sqrt{2})$.*

Montrer comment le théorème des forces vives permet de trouver la position de M en tout instant; en particulier, indiquer le temps employé par le mobile pour aller de A jusqu'au point B. Intersection du tube et de l'axe des y; et donner le travail effectué de A en B.

Epreuve pratique. — *Calculer à 0,0001 près les abscisses des points de contact des tangentes menées, par l'origine des coordonnées, à la courbe*

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On pourra ramener d'abord l'équation du problème à la forme

$$L\frac{x+1}{x-1} - 2x = 0.$$

Toutes les méthodes d'approximation, y compris les méthodes purement graphiques, sont admises.

(Octobre 1913.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Courbure des courbes gauches.*

(Formules de Serret.)

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{a^2 - x^2}.$$

si l'on détermine la constante d'intégration de manière qu'on ait $y = 0$ *pour* $x = 0$, *on obtient l'intégrale particulière*

$$(1) \qquad y = -a \log\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Étudier la forme de la courbe représentée par l'équation (1) *en coordonnées rectangulaires. Calculer l'expression du rayon de courbure, et la longueur d'arc comptée à partir de l'origine.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Soit la courbe*

$$x = 6t + 6t^2 + 2t^3,$$
$$y = 2t^3,$$
$$z = 6t.$$

Calculer les cosinus directeurs α, β, γ *de la tangente. Incidemment démontrer l'identité*

$$(1 + t)^4 + t^4 + 1 = 2(1 + t + t^2)^2$$

et en conclure que α, β, γ *ainsi que la vitesse* $V = \frac{ds}{dt}$ *sont rationnels en* t.

2° *Calculer les coefficients* A, B, C *du plan osculateur*

$$A = y'z'' - z'y''; \qquad B = z'x'' - x'z''; \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

Incidemment démontrer l'identité

$$t^2 + (1 + t)^2 + t^2(1 + t)^2 = (1 + t + t^2)^2$$

et en conclure que les cosinus directeurs de la binormale, α'', β'', γ'', *sont rationnels en* t. (Novembre 1913.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2222.

(1914, p. 33.)

Soient (E) *une ellipse ayant pour axes* Ox *et* Oy, M *un point de cette ellipse. La tangente en* M *à* (E) *coupe* Ox *et* Oy *en* α *et* β ; *la normale les coupe en* α' *et* β'. *Soient* (P) *la parabole tangente en* O *à* Ox *et touchant les parallèles à la normale et à la tangente menées respectivement par* α *et* α' ; (P′) *la parabole analogue, obtenue en remplaçant* Ox *par* Oy.

1° *Démontrer que les paraboles* (P) *et* (P′) *ont même axe et même foyer;*

2° *Donner une construction géométrique simple de l'axe et du foyer communs.*

F. Balitrand.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

La construction classique du foyer d'une parabole dont on connaît trois tangentes, et le point de contact situé sur l'une d'elles, montre que le foyer commun des paraboles (P) et (P′) est le point d'intersection F des cercles $O\alpha\beta$, $O\alpha'\beta'$. La direction commune de l'axe de ces paraboles est la symétrique de la droite OF par rapport à Ox ou Oy.

Autre solution par l'auteur.

2226.

(1914, p. 336.)

On donne une ellipse (ou une hyperbole) et un cercle ayant le même centre; trouver le lieu du point d'intersection des tangentes menées à la conique par les extrémités d'un diamètre du cercle.

T. Ono.

Solution.

Par M. R. Bouvaist.

Soit O le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole, le lieu cherché est le lieu de l'intersection des tangentes menées à cette courbe par un point M du cercle avec le diamètre conjugué de OM.

Soient $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ un point du cercle, nous sommes ramenés à éliminer φ entre les deux équations

$$\left(\frac{R^2\cos^2\varphi}{a^2} \pm \frac{R^2\sin^2\varphi}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left[\frac{Rx\cos\varphi}{a^2} \pm \frac{Ry\sin\varphi}{b^2} - 1\right]^2 = 0,$$

$$\frac{x}{a^2\sin\varphi} \pm \frac{y}{b^2\cos\varphi} = 0;$$

il vient

$$\frac{x^2(R^2 \mp b^2)}{a^2} \pm y^2\frac{(R^2 - a^2)}{b^2} - R^2 = 0.$$

Le lieu est donc une conique, qui coïncide avec le cercle orthoptique si $R^2 = a^2 \pm b^2$.

2227.

(1914, p. 336.)

Le lieu du point d'intersection des normales menées aux extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse est une courbe du sixième ordre.

T. Ono.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Nous obtiendrons l'équation du lieu en éliminant φ entre les deux équations

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0,$$

$$\frac{ax}{\sin\varphi} + \frac{by}{\cos\varphi} + c^2 = 0;$$

il vient

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = \frac{c^4}{2}(a^2x^2 - b^2y^2)^2.$$

Le lieu est la projection d'une rosace à quatre branches.

2228.

(1914, p. 336.)

Étant donnés deux faisceaux de cercles φ et φ', on associe à chaque cercle du faisceau φ le cercle du faisceau φ' qui lui est orthogonal. Démontrer que le lieu du centre du cercle qui passe par leurs points d'intersection et par un point fixe du plan est une conique.

R. Goormaghtigh.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. R. Bouvaist.

Soient A et B, A′ et B′ les points de base des faisceaux φ et φ', O l'intersection des droites AB et A′B′. Soient Γ et Γ' deux cercles associés : leur axe radical enveloppe une conique tangente à AB et A′B′; soit en effet M le point de rencontre de cette droite avec AB; il existe un cercle Γ' et un seul passant par A′ et B′ et orthogonal au cercle de centre M et de rayon $\sqrt{\text{MA.MB}}$; il n'existe de même qu'un cercle Γ orthogonal à Γ'. L'axe radical des cercles Γ et Γ' ainsi déterminés passera par M; comme il est unique, les points de rencontre de cette droite avec AB et A′B′ se correspondent homographiquement; son enveloppe est donc une conique. Une transformation par inversion montre donc que l'enveloppe d'un cercle passant par l'intersection de Γ et Γ' et un point du plan est une inverse de conique; son centre décrit par suite la polaire réciproque de cette dernière conique.

QUESTIONS.

2231. Soient a une racine simple de l'équation $\varphi(x) = 0$ et $F(x)$ un polynome défini par l'équation

$$\varphi^2(x) = (x - a)^2 F(x).$$

Démontrer qu'on a

$$F(a) = \varphi'^2(a), \qquad F'(a) = \varphi'(a)\varphi''(a),$$
$$F''(a) = \frac{\varphi'^2(a)}{4} + \frac{\varphi'(a)\varphi'''(a)}{3}, \qquad \ldots.$$

Supposant qu'on ait

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

et que $f(x)$ soit un polynome de degré $m\,(m < 2n)$, vérifier l'identité

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^2}\,\frac{1}{(x-a_i)^2}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^3}\,\frac{1}{x-a_i}.$$

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant connus, déterminer le polynome $f(x)$ par la condition que la relation précédente ne contienne pas de termes de la forme

$$\frac{A_i}{x - a_i}$$

et, dans ce cas, trouver la forme de la relation considérée.

N. Abramescu.

2232. Sur les perpendiculaires abaissées du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC sur les côtés de ce triangle, on prend respectivement les points D, E, F tels que

$$DB = DC = \lambda l, \qquad EC = EA = \lambda m, \qquad FA = FB = \lambda n,$$

l, m, n étant des nombres donnés et λ une quantité variable. Déterminer λ de telle sorte que le centre d'orthologie (deux triangles ABC, A'B'C' sont orthologiques quand les perpendiculaires des sommets A', B', C' sur BC, CA, AB sont concourantes en un point P, et aussi les perpendiculaires de A,

B, C sur B'C', C'A', A'B' concourent en un point P'; P et P' sont dits *centres d'orthologie*) des triangles ABC, DEF (autre que O) soit respectivement symétrique des sommets A, B, C par rapport aux côtés EF, DF, DE.

N. Abramescu.

2233. Soient A', B', C' les pieds des trois céviennes AM, BM, CM du triangle ABC. Trouver l'enveloppe Γ de l'axe d'homologie Δ des triangles ABC, A'B'C' quand le point M décrit une courbe Σ. En particulier : 1° quand la courbe Σ est une conique circonscrite au triangle ABC, Γ se réduit à un point; 2° quand Σ est une droite, Γ est une conique inscrite au triangle ABC. Étudier la transformation M, Δ; 3° quand la courbe Σ est une conique variable d'un faisceau passant par les points donnés A, B, C, D, la courbe Γ se réduit à un point qui décrit deux droites.

N. Abramescu.

2234. De chaque point M d'une courbe (M), on abaisse une perpendiculaire MH sur une droite fixe Δ; par le point H on mène les parallèles MT et MN à la tangente et à la normale en M à (M). Lorsque M décrit (M), ces deux droites enveloppent deux courbes (T) et (N). Montrer que les centres de courbure de ces courbes s'obtiennent par la construction suivante : Soient I le point de rencontre des normales à (T) et (N) et A la projection sur Δ du centre de courbure de la développée de (M); A' le symétrique de A par rapport à I. Les projections de A' sur les normales aux courbes (T) et (N) donnent les centres de courbure cherchés. (Comparer *Nouvelles Annales*, juin 1913, question 2207.)

F. Balitrand.

2235. Soient A, B, C, D les pieds des normales, issues d'un point P, à une ellipse d'axes Ox et Oy. Les points B, C, D et le point A', diamétralement opposé sur l'ellipse au point A, sont sur un cercle dit *cercle de Joachimsthal*. Démontrer que le centre de ce cercle peut être obtenu par la construction suivante : Soient α et β les points de rencontre de la normale en A avec les axes Ox et Oy, M le point d'intersection des perpendiculaires élevées par ces points aux axes, M_1 le symétrique de M par rapport à O; le centre cherché est le milieu du segment M_1P.

Ce théorème résulte de l'équation du cercle de Joachimsthal mise sous une forme convenable.

F. Balitrand.

2236. Trouver l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x + y}.$$

E.-N. Barisien.

2237. Les trois équations

$$(1) \qquad (x-2a)(2x+a)(x+6a)(2x-3a) - 4ax(3x-4a)(4x-9a) = 0,$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{a\sqrt{2a-3x}} + (a-x)\sqrt{x+2a} - \sqrt[3]{a\sqrt{2a-3x}} - (a-x)\sqrt{x+2a} = \sqrt{a}\sqrt[3]{2\sqrt{2}},$$

$$(3) \quad \sqrt[6]{a\sqrt{a}+\sqrt{a^3+x^3}} + \sqrt[6]{a\sqrt{a}-\sqrt{a^3-x^3}} = \sqrt[6]{2a\sqrt{a}}$$

ont les deux racines communes $\frac{a}{4}(9 \pm \sqrt{33})$ qui sont racines doubles de l'équation (1).

Les autres racines de l'équation (2) sont

$$0, \quad -a(3 \pm \sqrt{-3}), \quad \frac{a}{4}(3 \pm 5\sqrt{-3}).$$

Les autres racines de l'équation (3) sont

$$0, \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1+\sqrt{-3}), \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1-\sqrt{-3}).$$

E.-N. Barisien.

2238. Établir les identités suivantes :

1°

$$1 + \frac{n}{1}\frac{1}{2n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots + \frac{n}{1}\frac{1}{2n-1} + 1 = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)};$$

2°

$$\frac{1}{2n-1}+\frac{n-1}{1}\,\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\,\frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}+\ldots$$
$$+\frac{n-1}{2n-1}-1=\frac{1}{2}\,\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}.$$

T. Ono.

2239. On donne deux points A, B sur chacun des axes de coordonnées rectangulaires. Soient AM, BN deux droites menées jusqu'à l'axe opposé, et P leur intersection, de telle sorte qu'on ait la relation

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{PM}=\frac{1}{BP}+\frac{1}{PN}.$$

1° Démontrer que le lieu du point P est une strophoïde;

2° Les tangentes en A, B sont parallèles à son asymptote réelle;

3° Les deux tangentes menées de A à la courbe sont égales à OA, O étant l'origine des coordonnées;

4° L'aire de la boucle est représentée par l'expression

$$\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)^3}\left[4(a^4-b^4)+8ab(a^2-b^2)\log\frac{a-b}{a+b}\right.$$
$$\left.-(a^4-6a^2b^2+b^4)\pi\right].$$

où $OA=a$, $OB=b<a$;

5° Examiner le cas particulier où $a=b$.

T. Ono (Kagoshima, Japon).

2240. Des pieds des bissectrices intérieures, D, E, F, d'un triangle ABC, on mène les parallèles aux côtés du triangle; elles coupent BC, CA, AB respectivement en E_2 et F_1, D_2 et E_1, D_1 et F_2. Montrer que les droites AF_1, BE_1 et CD_1, AE_2, BD_2 et CF_2 concourent en deux points J_1 et J_2 tels que la droite J_1J_2 est perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC.

V. Thébault.

[K' 11c]

SUR LES QUADRILATÈRES DE PONCELET;

PAR M. PAUL MONTEL.

Soient O et O' les centres de deux cercles de rayons R et r, et d la distance de ces centres. Si le cercle O est circonscrit à un triangle dont les côtés sont tangents à O', les nombres R, r et d sont liés par la relation $d^2 = R^2 - 2Rr$, due à Euler. M. Gambier a donné récemment une démonstration élégante de la relation d'Euler qui permet de déduire, de l'existence d'un triangle inscrit dans O et circonscrit à O', l'existence d'une infinité de pareils triangles (1).

Je me propose de donner une démonstration élémentaire directe du théorème correspondant relatif au quadrilatère :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère convexe inscrit dans O *et circonscrit à* O' *est*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2}. \tag{1}$$

S'il existe un pareil quadrilatère, il en existe une infinité (2).

Je démontrerai cette proposition en faisant voir que :

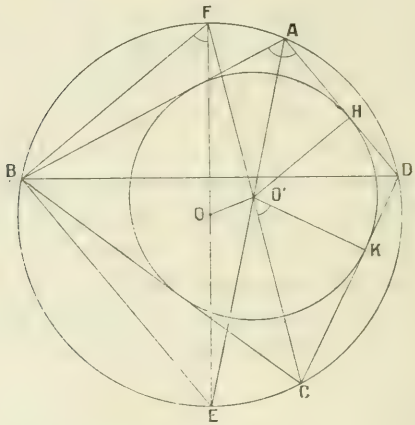
(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. XIV, 1914, p. 366.

(2) Poncelet a démontré que, s'il existe un polygone de n côtés inscrit dans O et circonscrit à O', il en existe une infinité; on donne le nom de *polygones de Poncelet* aux polygones inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle.

1° s'il existe un quadrilatère convexe inscrit dans O et circonscrit à O′, la relation (1) est vérifiée; 2° si la relation (1) est vérifiée, on peut construire un quadrilatère inscrit dans O et circonscrit à O′ dont l'un des sommets est pris arbitrairement sur O.

Soit ABCD (*fig.* 1) un quadrilatère convexe inscrit

Fig. 1.



dans un cercle O et circonscrit à un cercle O′ que nous supposerons d'abord situé dans l'intérieur du quadrilatère; la puissance du centre O′ par rapport au cercle O est

$$d^2 - R^2 = - O'A . O'E,$$

E étant le milieu de l'arc BCD. Soient H le point de contact du côté AD et du cercle O′, et F, milieu de l'arc BAD, le point diamétralement opposé au point E sur le cercle O. Les triangles AHO′ et FBE sont semblables, puisqu'ils sont rectangles, et que les angles BFE et EAD sont tous deux égaux à la moitié de l'angle BAD.

On a donc

$$(2) \qquad \frac{O'A}{2R} = \frac{r}{BE},$$

d'où

$$O'A.O'E = 2Rr\frac{O'E}{BE}.$$

Soit K le point de contact du côté CD et du cercle O'; l'angle $\widehat{O'CK}$ est complémentaire de l'angle $\widehat{EAD}$, puisque les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires; la droite CO' passe d'ailleurs par le point F. Les triangles CKO' et EBF sont semblables et l'on peut écrire

$$(3) \qquad \frac{O'C}{2R} = \frac{r}{BF},$$

d'où, en divisant (2) et (3) membre à membre,

$$\frac{O'A}{O'C} = \frac{BF}{BE}.$$

On déduit de là, comme $\frac{O'A}{O'C} = \frac{O'F}{O'E}$,

$$\frac{O'E}{BE} = \frac{O'F}{BF} = \frac{\sqrt{\overline{O'E}^2 + \overline{O'F}^2}}{\sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{BF}^2}} = \frac{\sqrt{2(R^2 + d^2)}}{2R};$$

donc

$$O'A.O'E = 2Rr\frac{O'E}{BE} = r\sqrt{2(R^2 + d^2)}$$

et

$$d^2 - R^2 = -r\sqrt{2(R^2 + d^2)}.$$

Si (*fig.* 2) le cercle O' n'est pas intérieur au quadrilatère, il suffit de remarquer que la puissance du point O' est alors égale à $+O'A.O'E$ et de répéter les mêmes raisonnements pour aboutir à la formule

$$d^2 - R^2 = +r\sqrt{2(R^2 + d^2)}.$$

Dans tous les cas, on peut écrire

$$d^2 - R^2 = \pm r\sqrt{2(R^2 + d^2)}$$

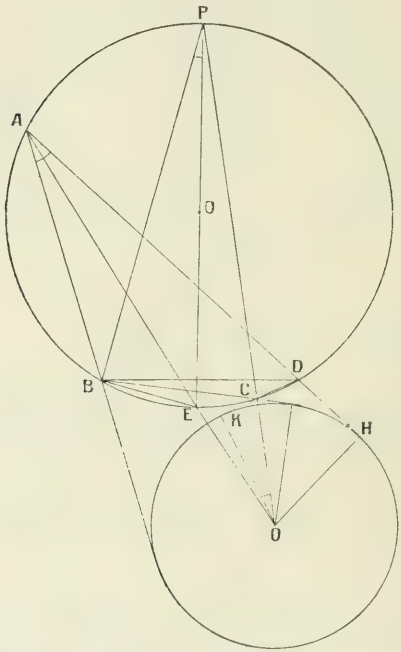
ou

$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2) = r^2[(R - d)^2 + (R + d)^2],$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R - d)^2} + \frac{1}{(R + d)^2}.$$

Fig. 2.



Réciproquement, supposons que cette relation soit satisfaite; on en déduit que

$$\frac{1}{r^2} > \frac{1}{(R - d)^2} \qquad \text{ou} \qquad r^2 < (R - d)^2;$$

donc

$$r < R - d \qquad \text{ou} \qquad r < d - R.$$

Le cercle O′ est donc tout entier à l'intérieur ou tout entier à l'extérieur du cercle O. Considérons seulement le premier cas : par un point quelconque B du cercle O, menons une tangente BA au cercle O′ qui rencontre le cercle O en un second point A; par A menons la seconde tangente au cercle O′ qui rencontre en D le cercle O, et enfin par D menons la seconde tangente au cercle O′ qui rencontre en C le cercle O; je vais montrer que DC est tangente au cercle O′. Soient encore E et F les milieux des arcs BCD et BAD, et H le point de contact de AD et du cercle O′. Nous pouvons écrire, puisque $d^2 - R^2 = -r\sqrt{2(R^2 + d^2)}$,

$$O'A.O'E = r\sqrt{2(R^2 + d^2)},$$

et, comme

$$(2) \qquad \frac{O'A}{2R} = \frac{r}{BE},$$

on a aussi

$$O'A.O'E = 2Rr\frac{O'E}{BE};$$

d'où

$$\frac{O'E}{BE} = \frac{\sqrt{2(R^2 + d^2)}}{2R}.$$

Joignons O′F qui rencontre le cercle O au point C′, on aura

$$\frac{O'E}{BE} = \frac{\sqrt{\overline{O'E}^2 + \overline{O'F}^2}}{\sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{BF}^2}} = \frac{O'F}{BF},$$

et comme

$$O'A.O'E = O'F.O'C',$$

$$(4) \qquad \frac{O'C'}{O'A} = \frac{BE}{BF}.$$

Divisons membre à membre les égalités (2) et (4),

il vient

$$(5) \qquad \frac{O'C'}{2R} = \frac{r}{BF}.$$

Soit K′ le pied de la perpendiculaire abaissée de O′ sur C′D; les triangles C′K′O′ et EBF sont semblables puisqu'ils sont rectangles et que les angles $\widehat{O'C'K'}$ et $\widehat{BEF}$ ont la même mesure; on en conclut la proportion

$$\frac{O'C'}{2R} = \frac{O'K'}{BF},$$

qui, comparée à la proportion (5), montre que O′K′ est égal à r : la droite DC′ coïncide avec la droite DC et le point C′ avec le point C. La droite O′C est alors la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$ et, par suite, BC est tangente au cercle O′.

La démonstration est la même lorsque le cercle O′ est extérieur au cercle O.

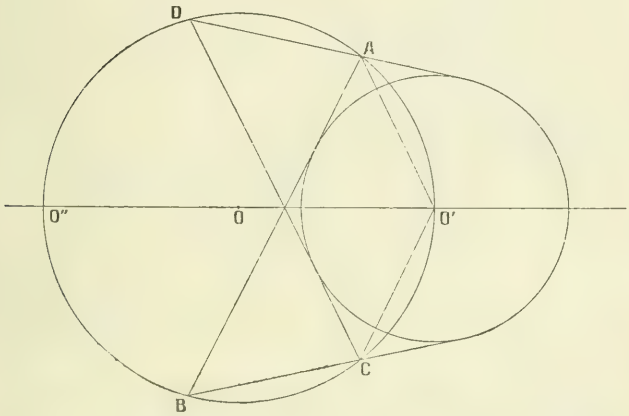
Remarque I. — Nous n'avons pas établi, dans la démonstration réciproque précédente, que le quadrilatère construit est convexe; mais un quadrilatère inscriptible ne peut être que convexe ou biconcave et nous allons voir que, dans ce dernier cas, les cercles O et O′ sont nécessairement sécants.

Soit, en effet (*fig.* 3), ABCD un quadrilatère biconcave inscrit dans O et circonscrit à O′ : les bissectrices extérieures des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ se coupent en O′; elles doivent aussi se couper au milieu de l'arc AC du cercle O, donc le point O′ est situé sur la circonférence O.

Réciproquement, supposons que le cercle O′ ait son centre sur O; construisons, comme précédemment, les

côtés BA, AD, DC tangents à O′; je dis que le côté BC est aussi tangent à ce cercle; en effet, la droite AO′ est la bissectrice extérieure de l'angle BAD, donc O′ est le milieu de l'arc AO′C du cercle O; par suite, CO′ est la

Fig. 3.



bissectrice extérieure de l'angle BCD et BC est tangente au cercle O′. On peut remarquer que tous les quadrilatères ainsi construits admettent la droite OO′ comme axe de symétrie, car la bissectrice intérieure de l'angle DAB et celle de l'angle BCD rencontrent le cercle O au point O″ diamétralement opposé au point O′: le diamètre O′O″ est perpendiculaire aux cordes AC et BD.

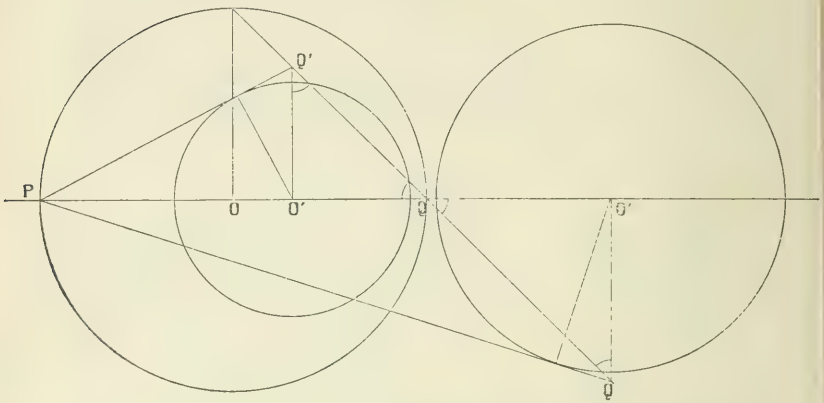
Remarque II. — La relation (1) peut s'écrire

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\overline{O'P}^2} + \frac{1}{\overline{O'Q}^2},$$

en appelant P et Q les extrémités du diamètre du cercle O qui passe par O′: on déduit de cette formule

une construction rapide du rayon r lorsqu'on se donne le cercle O et le centre O'. La longueur r est, en effet (*fig.* 4), la hauteur d'un triangle rectangle dont

Fig 4.



les côtés de l'angle droit ont pour longueur O'P et O'Q.

Sous sa dernière forme, la relation (1) peut être rapprochée de la relation d'Euler $d^2 = R^2 \pm 2Rr$, qui s'écrit de même

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{O'P} \pm \frac{1}{O'Q}.$$

[A 1 a]

SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES DISPOSÉES EN ESCALIER;

PAR M. R. ALEZAIS.

Un problème élémentaire d'Arithmétique a attiré l'attention de M. Haton de la Goupillière qui lui a consacré deux Notes dans les *Comptes rendus* de

l'Académie. Voici quelques compléments sur la première de ces Notes (*Sur une propriété des progressions arithmétiques*, 23 novembre 1914) :

Avec M. Haton de la Goupillière, je dirai que les termes d'une série sont disposés en *escalier* ou forment un escalier, quand ils sont écrits sur des lignes superposées dont la plus élevée contient les p premiers termes de la série, la deuxième les $p+q$ suivants, la troisième les $p+2q$ suivants, et ainsi de suite; j'appellerai p le *palier* et q la *marche*. Je dirai aussi que les $p+(n-1)q$ termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne à partir du haut forment la $n^{\text{ième}}$ *assise*.

Le problème est le suivant : *Le premier terme a d'une progression arithmétique étant un entier positif, nul ou négatif et sa raison r un entier positif, on cherche à déterminer les entiers a, r, p, q de manière que la somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ assise soit, quel que soit n, le cube d'un entier* N.

On trouve qu'il ne peut y avoir de solution que si l'on suppose $N = c[p+(n-1)q]$, où c est un entier quelconque indépendant de n. On voit aussi que si a_1, r_1 et a_c, r_c sont des valeurs de a et r relatives à $c=1$ et à une valeur quelconque de c, on a

$$a_c = c^3 a_1, \qquad r_c = c^3 r_1.$$

Il ne reste donc qu'à étudier le cas où

$$N = p+(n-1)q,$$

c'est-à-dire où la somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ assise est le cube du nombre des termes de cette assise. On trouve alors que les conditions du problème sont exprimées par les formules

$$(1) \qquad r = 2q, \qquad a = p^2 - pq + q.$$

qui fournissent toujours une solution unique quand p et q sont des entiers donnés.

Le problème inverse n'est pas toujours possible. La première équation (1) montre que r doit être pair et M. Haton de la Goupillière n'a même considéré que le cas où r est multiple de 4; mais cette dernière restriction n'est pas nécessaire. A toute valeur entière et positive de q (et par suite à toute valeur paire de r) correspondent des systèmes de valeurs de a et de p en nombre infini qui constituent des solutions; mais, et ceci est la seconde des remarques que j'ai à présenter, si l'on convient de dire que deux escaliers ne sont pas distincts ou qu'ils sont équivalents, quand l'un se déduit de l'autre par le seul retranchement de quelques-unes des assises supérieures, nous allons voir qu'à chaque valeur de q correspondent exactement q escaliers distincts et qu'on peut leur donner respectivement pour palier $1, 2, \ldots, q$.

On tire de la seconde équation (1)

$$p = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2} - 1\right)^2 + a - 1}.$$

Posons

$$\left(\frac{q}{2} - 1\right)^2 + a - 1 = \left(\frac{q}{2} - 1 + \mathrm{R}\right)^2;$$

il en résultera

$$a = \mathrm{R}^2 + (q - 2)\mathrm{R} + 1$$

et

$$p = \frac{q}{2} \pm \left(\frac{q}{2} - 1 + \mathrm{R}\right):$$

d'où les deux solutions

$$p_1 = q - 1 + \mathrm{R}, \qquad p_2 = 1 - \mathrm{R},$$

et l'on voit que, pour que a et p soient entiers, il faut et il suffit que R le soit; il y a donc bien une infinité de solutions.

Notons toutefois qu'il suffit, pour avoir toutes les solutions, de donner à R les valeurs entières supérieures ou égales à la racine de l'équation $p_1 = p_2$, c'est-à-dire au nombre

$$R = -\left(\frac{q}{2} - 1\right).$$

En effet, si nous prenons des entiers équidistants de ce nombre, à savoir

$$\lambda \quad \text{et} \quad -\lambda - 2\left(\frac{q}{2} - 1\right) = -(\lambda + q - 2),$$

et si nous indiquons par des indices les valeurs correspondantes de a et de p, nous aurons

$$\begin{aligned} a_{-(\lambda+q-2)} &= (\lambda + q - 2)^2 - (q - 2)(\lambda + q - 2) + 1 \\ &= \lambda^2 + (q - 2)\lambda + 1 = a_\lambda, \\ (p_1)_{-(\lambda+q-2)} &= q - 1 - \lambda - q + 2 = \quad 1 - \lambda = (p_2)_\lambda, \\ (p_2)_{-(\lambda+q-2)} &= \quad 1 + \lambda - q - 2 = q - 1 + \lambda = (p_1)_\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi a reste le même et p_1 et p_2 ne font que s'échanger.

Il faut évidemment n'admettre pour p que des entiers positifs; nous allons voir qu'en tenant compte de ce fait et en donnant à R les valeurs entières supérieures ou égales à $-\left(\frac{q}{2} - 1\right)$, mais inférieures ou égales à 1, on obtient exactement q escaliers et que tous les autres leur sont équivalents.

D'abord on obtient q escaliers. En effet, posons suivant la parité $q = 2k + 1$ ou $q = 2k + 2$. Il y a alors k entiers nuls ou négatifs supérieurs à $-\left(\frac{q}{2} - 1\right)$ et chacun d'eux donne à p_1 et à p_2 des valeurs positives et distinctes; ils fournissent donc $2k$ solutions. Pour $R = 1$, p_2 est nul, mais p_1 est positif et en fournit

une $(2k+1)^{\text{ième}}$. Enfin, quand q est pair, $-\left(\frac{q}{2}-1\right)$ est entier et ce nombre donne à p_1 et à p_2 une même valeur positive qui fournit la $q^{\text{ième}}$ solution relative à ce cas.

Pour ces q premiers escaliers, je représenterai la valeur de R par λ et je les appellerai les *escaliers* λ. L'entier λ doit prendre des valeurs décroissantes à partir de 1 si l'escalier dépend de p_1, à partir de 0 s'il dépend de p_2; dans les deux cas, ses valeurs doivent descendre jusqu'à $-(k-1)$ si $q=2k+1$, mais l'une des deux suites de valeurs doit aller jusqu'à $-k$, si $q=2k+2$. On vérifie facilement que, pour ces valeurs de λ, les entiers p_1 et p_2 prennent dans leur ensemble les valeurs $1, 2, \ldots, q$.

Établir que tout autre escalier est équivalent à l'un des escaliers λ, revient à prouver que, pour toute valeur de R entière et supérieure à 1, le premier terme $a=R^2+(q-2)R+1$ est égal au premier terme d'une des assises d'un escalier λ. Pour celui-ci, le premier terme de la série est $\lambda^2+(q-2)\lambda+1$, et le premier terme de la $n^{\text{ième}}$ assise, occupant dans la série le rang

$$\begin{aligned}&(n-1)p+(1+2+\ldots+n-2)q-1\\&\quad=(n-1)p+\frac{(n-1)(n-2)}{2}q+1,\end{aligned}$$

a pour valeur

$$\lambda^2+(q-2)\lambda+1+\left[(n-1)p-\frac{(n-1)(n-2)}{2}q\right]2q.$$

Soit d'abord

$$p=p_1=q-1+\lambda:$$

on est alors ramené à

$$\begin{aligned}&R^2+(q-2)R\\&\quad=\lambda^2+(q-2)\lambda\\&\qquad+\left[(n-1)(q-1-\lambda)-\frac{(n-1)(n-2)}{2}q\right]2q,\end{aligned}$$

ou

$$R^2 + (q-2)R - \lambda^2 + 2\lambda$$
$$+ [2(n-1) - (2n-1)\lambda]q - n(n-1)q^2 = 0;$$

équation du deuxième degré en R dont les solutions sont

$$R = \frac{2 - q \pm [(2n-1)q + 2(\lambda - 1)]}{2}.$$

Puisque nous n'avons à considérer que les valeurs positives de R, il suffit de prendre le signe $+$, ce qui donne $R = (n-)q + \lambda$; d'où, n_1 étant la solution de cette équation,

$$n_1 = \frac{R - \lambda}{q} + 1.$$

Soit ensuite

$$p = p_2 = 1 - \lambda.$$

L'équation est alors

$$R^2 + (q-2)R$$
$$= \lambda^2 - (q-2)\lambda + \left[(n-1)(1-\lambda) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}q\right]2q,$$

ou

$$R^2 + (q-2)R - \lambda^2 + 2\lambda$$
$$- [2(n-1) - (2n-3)\lambda]q - (n-1)(n-2)q^2 = 0,$$

et ses racines sont

$$R = \frac{2 - q \pm [(2n-3)q - 2(\lambda - 1)]}{2}.$$

En prenant le signe $+$, on a $R = (n-2)q - \lambda + 2$, et en désignant par n_2 la solution en n,

$$n_2 = \frac{R + \lambda - 2}{q} + 2.$$

Pour qu'un escalier R soit équivalent à un escalier λ, il faut et suffit que R rende entier soit n_1, soit n_2 pour

l'une des valeurs que λ peut prendre,

$$\left.\begin{array}{ll} n_1 \text{ est entier si l'on a} & R \equiv \lambda \\ n_2 \text{ est entier si l'on a} & R \equiv -\lambda + 2 \end{array}\right\} \pmod{q}.$$

Quand λ parcourt les séries de valeurs indiquées plus haut, on trouve que λ et $-\lambda + 2$ parcourent dans leur ensemble un système complet de restes suivant le module q; quel que soit R, il sera donc possible de déterminer λ de sorte que n_1 ou n_2 soit entier.

[L¹4]

SUR LES CONIQUES INSCRITES A UN TRIANGLE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

---

1. Soient un triangle ABC; A′, B′, C′ les pieds des hauteurs; H l'orthocentre; A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés.

Considérons une conique quelconque Σ inscrite à ce triangle, et une quatrième tangente Δ à la courbe, qui coupe AC et CB respectivement en D et E. On sait que le centre I de la conique Σ est situé sur la médiane Δ' du quadrilatère circonscrit formé par les quatre droites Δ, AC, CB, BA.

De plus, les cercles ω_1, ω_2, ω_3, décrits sur les diagonales du quadrilatère complet comme diamètres, se coupent en deux points P et Q et la droite PQ contient les orthocentres des quatre triangles formés par les quatre précédentes droites.

Si nous supposons donc variable la droite Δ, *le*

triangle ABC *et la conique* Σ *restant fixes, la droite variable* PQ *passe en un point fixe* H, *orthocentre de* ABC.

2. Appelons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, ω le milieu de OH, L celui de PQ, et proposons-nous de calculer la distance Iω.

D'après ce qui précède (I étant situé sur Δ'), IL est perpendiculaire sur PQ en son milieu, et

$$\overline{IP}^2 - \overline{IH}^2 = \overline{LP}^2 - \overline{LH}^2 = (LP + LH)(LP - LH)$$
$$= PH \times HQ = BH \times HB' = \frac{1}{2}\left(R^2 - \overline{OH}^2\right),$$

R étant le rayon du cercle circonscrit O; d'où visiblement, dans le triangle OIH,

$$2\overline{IH}^2 - \overline{OH}^2 = 2\overline{IP}^2 - R^2 = 4\overline{I\omega}^2 - 2\overline{OI}^2.$$

On obtient ainsi finalement

$$(1) \qquad 4\overline{I\omega}^2 = 2\overline{IP}^2 + 2\overline{OI}^2 - R^2.$$

3. Supposons que la tangente Δ soit perpendiculaire à CB; alors, PQ se confond en direction avec HE. Q vient en E, qui est situé sur CB et sur le cercle orthoptique de la conique Σ.

La relation (1) devient, $2a$ et $2b$ étant les axes de la conique,

$$(2) \qquad 4\overline{I\omega}^2 = 2(a^2 + b^2) + 2\overline{OI}^2 - R^2.$$

On en déduit immédiatement que :

Le lieu géométrique des centres des coniques inscrites à un triangle donné, et telles que leur cercle orthoptique soit de rayon donné ρ, *est une circonférence* H *dont le centre est l'orthocentre du triangle*

et dont le rayon ρ_1 est donné par la relation

$$(3) \qquad \rho_1^2 = 2\rho^2 - \frac{1}{2}(R^2 - \overline{OH}^2).$$

En effet,

$$4\overline{I\omega}^2 - 2\overline{OI}^2 = 2(a^2 + b^2) - R^2 = 2\rho^2 - R^2 = \text{const.}$$

4. Le cercle inscrit I au triangle ABC est l'une des coniques Σ inscrites à ce triangle ; son cercle orthoptique lui est concentrique et de rayon $\rho = r\sqrt{2}$, r étant celui du cercle inscrit.

En remplaçant dans (2) la valeur de OI donnée par Euler, il vient

$$I\omega = \frac{R}{2} - r,$$

et le théorème de Feuerbach :

Dans un triangle quelconque, le cercle inscrit est tangent au cercle des neuf points,

est ainsi établi.

Inversement, si l'on suppose donné ce théorème de Feuerbach, la relation (2) donne pour $\overline{OI}^2$ la valeur trouvée par Euler.

5. Écrivons

$$\frac{1}{2}(\overline{OH}^2 - R^2) = (H),$$

(H) désigne la valeur algébrique commune aux produits

$$\overline{HA} \times \overline{HA'}, \qquad \overline{HB} \times \overline{HB'} \qquad \text{et} \qquad \overline{HC} \times \overline{HC'}.$$

L'expression (3), qui devient alors

$$\rho_1^2 = 2\rho^2 + (H),$$

fait apparaître aussitôt la valeur donnée par Steiner, de la distance de l'orthocentre au centre du cercle inscrit au triangle

$$\overline{HI}^2 = 2r^2 + (H).$$

Nous obtenons ainsi, d'une façon remarquablement simple et élémentaire, le résultat de démonstrations directes de Mannheim et de M. Fontené relativement au calcul de HI [1].

ρ_1 pouvant désigner la distance de l'orthocentre d'un triangle donné à un point quelconque de son plan, on obtient pour ρ les valeurs particulières suivantes :

$$\rho_G^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36},$$

(a, b, c côtés du triangle), lorsque le centre de la conique est au point de concours G des médianes du triangle ;

$$\rho_H^2 = -\frac{(H)}{2} = \frac{1}{2}\left(R^2 - \overline{OH}^2\right),$$

quand le centre de la conique est à l'orthocentre H du triangle. Cette valeur n'est d'ailleurs réelle que lorsque le triangle est acutangle. La conique touche les côtés en trois points α, β, γ obtenus, par exemple, en joignant le sommet A au point où A_1H rencontre B_1C_1 ;

$$\rho_0^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

si le centre de la conique est au centre O du cercle circonscrit.

Nous avons signalé ce cercle comme curieux dans les

---

(1) Fontené, *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, 1904, p. 38-43 ; 1906, p. 98. — Mannheim, *Ibid.*, 1906, p. 99.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1910, p. 280. Nous ajouterons que *ce cercle* O *est tel que le triangle podaire, par rapport au triangle* ABC, *de tout point de sa circonférence est équivalent au triangle orthique* A′B′C′ *de* ABC.

On sait en effet, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ étant le triangle podaire d'un point quelconque P de la circonférence O de rayon ρ_0, que

$$\frac{\text{aire } \alpha_1\beta_1\gamma_1}{\text{aire ABC}} = \frac{R^2 - \rho_0^2}{4R^2} = \frac{-(H)}{4R^2},$$

d'où

$$\text{aire } \alpha_1\beta_1\gamma_1 = S \times \frac{(H)}{4R^2} = S \times \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2}{4R^2}$$

(S = aire ABC).

6. Dans tout triangle ABC obtusangle, (H) est positif et le cercle H de rayon $\rho'^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{OH}^2 - R^2\right)$ est dit *conjugué* par rapport au triangle ABC. L'expression (3) permet alors d'énoncer ce théorème :

Quand une conique est inscrite à un triangle obtusangle, son cercle orthoptique est orthogonal au cercle conjugué à ce triangle.

En particulier :

Le cercle conjugué à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle inscrit à ce triangle.

M. Fontené a énoncé ces théorèmes après la solution de sa question 1468 (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, 1904, p. 39). Il y a ajouté les suivants, en partant de la valeur de la

distance $\overline{HO}^2$, donnée par Faure,

$$\overline{HO}^2 = R^2 + 2(H),$$

que l'on peut écrire

$$\overline{HO}^2 = (\rho'\sqrt{2})^2 + R^2.$$

Quand une conique est conjuguée à un triangle, son cercle orthoptique est orthogonal au cercle circonscrit au triangle.

Ainsi, *le cercle circonscrit à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle conjugué à ce triangle.*

Réciproquement, *si deux cercles sont tels que le cercle orthoptique du premier soit orthogonal au second, il existe une infinité de triangles circonscrits au premier et conjugués au second, une infinité de triangles conjugués au premier et inscrits au second.*

[O¹2]

SUR LES COURBES UNICURSALES A ARC RATIONNEL;

PAR M. J. HAAG,
Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Sous ce titre, nous entendons les courbes dont les coordonnées et l'abscisse curviligne du point courant peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un même paramètre.

Je dis que toutes ces courbes peuvent être obtenues de la manière suivante :

Soient θ et p deux fonctions rationnelles quelconques de t, θ' et p' leurs dérivées. L'enveloppe (C) *de la droite*

$$(1) \qquad \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}x + \frac{2\theta}{1+\theta^2}y = \frac{1+\theta^2}{2}\frac{p'}{\theta'}$$

est la plus générale des courbes cherchées.

1° *Cette enveloppe répond bien à la question.* — En effet, tout d'abord, les coordonnées x, y du point de contact, déduits de l'équation (1) par des calculs rationnels, sont des fonctions rationnelles de t.

En second lieu, si nous posons $\theta = \tang\frac{\varphi}{2}$, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{dp}{d\varphi}.$$

Elle provient, par dérivation par rapport à φ, de la suivante

$$(3) \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi = p,$$

laquelle représente une droite, dont l'enveloppe (C') admet (C) pour développée. Or, on sait que l'arc s de (C) égale le rayon de courbure R de (C'), lequel est, comme on le sait aussi, donné par la formule

$$(4) \qquad s = \mathrm{R} = -\left(p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\right).$$

Cette formule conduit manifestement à une expression rationnelle en t.

2° *Cette courbe* (C) *répondant à la question peut être obtenue de la manière précédente.* — Supposons que x, y, s soient fonctions rationnelles d'un même paramètre t. Si α désigne l'angle polaire de la demi-

tangente positive, on a

$$(5) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{s'}.$$

Ces cosinus et sinus sont fonctions rationnelles de t.

L'équation de la tangente s'écrit, d'autre part,

$$(6) \qquad X\sin\alpha - Y\cos\alpha = x\sin\alpha - y\cos\alpha = q.$$

Or, on a

$$p = \int q\,d\alpha = \int x\sin\alpha\,d\alpha - \int y\cos\alpha\,d\alpha$$
$$= -x\cos\alpha - y\sin\alpha - \int \cos\alpha\,dx + \int \sin\alpha\,dy,$$

$$(7) \qquad p = -x\cos\alpha - y\sin\alpha + \int ds(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$= s - x\cos\alpha - y\sin\alpha.$$

Cette expression est manifestement rationnelle par rapport à t, en vertu des hypothèses.

Ceci étant, si nous posons $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \theta$, l'équation (6) s'écrit successivement

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = \frac{dp}{d\alpha} = \frac{dp}{d\varphi},$$

$$\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}X + \frac{2\theta}{1+\theta^2}Y = \frac{dp}{d\theta}\,\frac{1+\theta^2}{2}.$$

On retrouve l'équation (1). Notre réciproque sera donc finalement établie, si nous prouvons que θ est rationnel en t. Or, ceci résulte de l'identité

$$\theta = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}$$

et de la rationnalité de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$.

[H2a]

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE;

PAR M. PARFENTIEFF,
Professeur à l'Université impériale de Kazan.

On peut trouver l'intégrale de l'équation différentielle linéaire très élégamment; la méthode est curieuse, parce qu'elle souligne très clairement le rôle que jouent les constantes arbitraires des intégrales des équations différentielles.

Prenons l'équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

et soit son intégrale générale

$$y = \varphi(x, C); \tag{2}$$

alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, \varphi). \tag{3}$$

Dérivons maintenant l'équation (3) par rapport à la constante arbitraire C; on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial C} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial C} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\log \frac{\partial \varphi}{\partial C}\right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

et par conséquent

$$\log \frac{\partial \varphi}{\partial C} = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x, C) = C e^{\int \frac{\partial f}{\partial \varphi} dx} + \psi(x). \tag{4}$$

Dans la formule (4) la fonction $\varphi(x)$ est encore inconnue et tout à fait arbitraire, mais nous la définirons sous la condition que la formule (4) doit satisfaire identiquement à l'équation (1).

La formule (4) est intéressante aussi à un autre point de vue; elle montre que la constante C entre dans l'intégrale de l'équation (1) linéairement, si $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ ne dépend pas de C. En prenant pour l'équation (1) l'équation de la forme

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = -py + q$$

(p et q sont des fonctions de x), notre formule (4) prend la forme

$$(6) \quad \varphi(x, C) = C e^{-\int p\,dx} + \psi(x) = e^{-\int p\,dx}[C + \xi(x)].$$

Si la relation (6) est la solution de (δ), on a

$$-p e^{-\int p\,dx}[C + \xi(x)] + e^{-\int p\,dx}\xi'(x)$$
$$= -p e^{-\int p\,dx}[C + \xi(x)] + q,$$

d'où

$$\xi'(x) = e^{\int p\,dx} q,$$

c'est-à-dire

$$\xi(x) = \int e^{\int p\,dx}\,dx,$$

et nous obtenons la formule classique

$$y = \varphi(x, C) = e^{-\int p\,dx}\left(C + \int e^{\int p\,dx}\,dx\right).$$

Notre remarque presque banale caractérise très bien la nature des méthodes classiques.

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Alger.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant connue la position d'une étoile rapportée à l'équateur et à l'équinoxe moyen d'une époque donnée, établir les formules qui permettent :*

1° *De ramener l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile à un autre équinoxe moyen;*

2° *De passer de la position moyenne au commencement de l'année à la position vraie à un jour donné.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Observation réelle du Soleil au théodolite.* (Correction.)

2° *Observation réelle d'étoile au méridien.* (Correction.)

(Juin 1912.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Mouvements des corps célestes. — *Cause initiale du mouvement parabolique. Loi du mouvement sur la parabole. Principe de la méthode d'Olbers pour la détermination d'une orbite parabolique.* (L'exposé du principe n'implique nullement le développement des formules du calcul proprement dit de l'orbite.)

II. Réfraction astronomique. — *De l'équation de Laplace mise sous la forme*

$$d\theta = -\frac{\alpha(1-S)\tang z\dfrac{d\rho}{\rho_0}}{\left[1-2\alpha\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)\right]\sqrt{1-2\left[\dfrac{\alpha}{\cos^2 z}\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)-\left(S-\dfrac{s^2}{2}\right)\tang^2 z\right]}},$$

déduire les termes du premier et du deuxième ordre

$$d\theta = -\alpha\tang z\frac{d\rho}{\rho_0} - \alpha^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)(3\tang z+\tang^3 z)\frac{d\rho}{\rho_0}$$
$$+\alpha S(\tang z+\tang^3 z)\frac{d\rho}{\rho_0},$$

et intégrer

$$\alpha = \text{constante de la réfraction},$$

$$\rho = \text{densité de l'air},$$

$$S = 1 - \frac{r_0}{r}.$$

Épreuve pratique. — *Établir la formule approchée*

$$E = M + \frac{(e'') \sin M}{\sqrt{1 - 2e \cos M - e^2}};$$

$$e'' = \frac{e}{\sin 1''}.$$

qui donne l'anomalie excentrique E *en fonction de l'anomalie moyenne* M *et calculer* E *par la série qui provient du développement de* $(1 - 2e \cos M + e^2)^{-\frac{1}{2}}$ *en se bornant pour celle-ci aux termes du troisième ordre en e.*

Appliquer ensuite au calcul du rayon vecteur r et de l'anomalie vraie W *de la planète Amaltée* (113) *à la date de juillet* 30, 0, 1912, *sachant que l'on a pour les éléments d'Amaltée :*

$$\text{Époque} = 1912, \text{ juillet } 10,0;$$

$$M = 81^\circ 17' 40'',2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\varphi = 5^\circ\ 2' 16'',2;$$

$$\mu = 968'',91086;$$

$$\log a = 0,3758152.$$

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Exposer les formules fondamentales du mouvement d'un seul corps autour du Soleil en se limitant au cas d'une orbite planétaire.*

Esquisser brièvement la suite des opérations à effectuer pour passer des positions héliocentriques aux positions géocentriques.

II. Phénomène d'aberration. — *Étudier particulièrement l'effet de l'aberration dans le mouvement diurne. Formules usuelles.*

Épreuve pratique. — *On donne les* Æ *de la Lune aux dates suivantes :*

		h	h m s
1913. Novembre	5.	0...	20.51. 9,62
		6...	21. 3.26,71
		12...	21.15.30,05
		18...	21.27.20,36
»	6.	0...	21.38.58,44
		6...	21.50.25,15
		12...	22. 1.41,37
		18...	22.12.48,04
»	7.	0...	22.23.46,10
		6...	22.34.36,52
		12...	22.45.20,26
		18...	22.55.58,30
»	8.	0...	23. 6.31,63
		6...	23.17. 1,23
		12...	23.27.28,06
		18...	23.37.53,10
		24...	23.48.17,33

On demande ensuite :

1° *L'*Æ *d'heure en heure de novembre* 5,0 *à novembre* 8, $12^h 0^m$;

2° *La variation en* Æ *pour* 1 *minute de novembre* 6,0 *à novembre* 8, $12^h 0^m$. (Novembre 1912.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Calcul des éléments d'une orbite circulaire connaissant à deux époques les directions géométriques d'un astre.*

Épreuve pratique. — *Graduation d'un polarimètre d'Arago. Utilisation de cette graduation pour déterminer la proportion de lumière polarisée dans un faisceau donné. Sensibilité de la méthode.* (Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Extension de la loi d'attraction de Newton aux étoiles doubles. Résultats des observations. Forme très probable des orbites, problème de Bertrand.*

Épreuve pratique. — *Analyse spectroscopique d'une source lumineuse.* (Juin 1913.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. *Problème des deux corps.*

Détermination du temps dans le cas de la trajectoire parabolique.

II. *Développer en série suivant les puissances de h, supposé petit, la variable x définie par la relation*

$$\cos x = \cos(\alpha + h).$$

Épreuve pratique. — *La* Connaissance des Temps *fournit les indications suivantes pour un jour donné :*

A midi moyen, à Paris :

Longitude héliocentrique de Mars	69° 49′ 53″,1
Latitude héliocentrique de Mars	0° 40′ 7″,4
Logarithme du rayon vecteur	0,1833129
Longitude du Soleil	223° 14′ 14″,4
Latitude du Soleil	0″,57
Logarithme du rayon vecteur de la Terre	$\bar{1}$,9959902

Calculer la longitude géocentrique de Mars, ainsi que la distance de Mars à la Terre. (Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — I. *Calcul de la réfraction astronomique.*

II. *Définition et calcul de l'erreur moyenne d'une observation.*

Épreuve pratique. — *En considérant la Terre comme une sphère de rayon* R = 6 378 000^{m}, *on demande de calculer les éléments d'un triangle tracé sur cette sphère, dans lequel on donne*

$$A = 52^{\circ}25'43'',7;$$
$$B = 65^{\circ}49'\ 3'',6;$$
$$C = 95\,452^{m},69;$$

en s'appuyant sur le théorème de Legendre.

(Novembre 1912.)

Clermont.

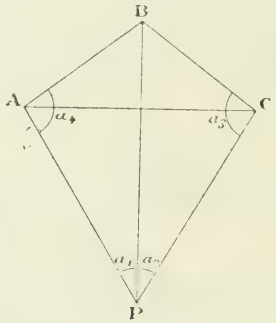
Épreuve théorique. — I. *Exposer, dans ses traits essentiels, l'étude du mouvement de rotation de la Terre autour de son centre par la méthode de Laplace. Indiquer ses résultats relativement aux phénomènes de précession et de nutation.*

II. *Description et usage du théodolite.*

Épreuve pratique. — *La longitude d'une étoile est* $56^\circ 16' 17''$ *et sa latitude* $9^\circ 19' 27''$. *On demande de calculer son ascension droite et sa déclinaison. On prendra l'obliquité de l'écliptique égale à* $23^\circ 27'$. (Juin 1912.)

Grenoble.

Composition. — I. *Détermination du méridien à l'aide d'une étoile dont le plan vertical a été déterminé à une heure sidérale connue. Influence d'une erreur* θ *sur cette*



heure. Conditions dans lesquelles on peut opérer de façon à rendre négligeable l'influence de cette erreur de l'heure, et résolution du problème de l'orientation dans ces conditions.

II. *Pour rattacher un signal accessible* P *à un triangle* ABC *exactement connu, on mesure les angles*

$$APB = a_1, \qquad BPC = a_2, \qquad BCP = a_3.$$

Déduire de ces mesures les valeurs les plus probables des angles a_1, a_2, a_3 et de l'angle a_4 = BAP.

Résoudre la même question en supposant qu'on ait aussi mesuré l'angle a_4.

Épreuve pratique. — *En un lieu de latitude $\lambda = 45^\circ 11' 22''$, l'heure sidérale étant $H_s = 11^h 9^m 9^s$, on a trouvé, sur le cercle horizontal du théodolite, pour azimut relatif d'une étoile, $A_0 = 108^\circ 10' 30''$, la graduation du cercle étant rétrograde. L'étoile a pour coordonnées*

$$\text{Æ} = 0^h 51^m 18^s, \qquad \text{Ⓓ} = 50^\circ 13' 54'',9.$$

1° *Calculer l'azimut A_m du méridien, côté nord, sur le cercle du théodolite;*

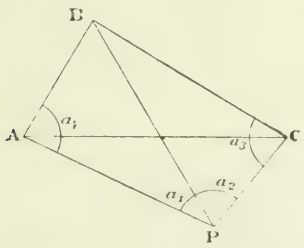
2° *Déterminer l'erreur qui affectera cet azimut si le chronomètre retarde de 1 seconde;*

3° *Chercher à quelle heure l'observation aurait dû être faite pour rendre insensible l'influence de l'erreur du chronomètre, et calculer à ce moment l'azimut vrai de l'étoile par rapport au méridien.* (Juillet 1911.)

Composition. — *Éléments d'une planète. Leur détermination pour une planète dont on possède une longue suite d'observations.*

Les éléments d'une planète étant connus, calculer ses coordonnées équatoriales Æ, Ⓓ pour une époque donnée t.

Épreuve pratique. — *Les angles* A, B, C *d'un triangle*



plan étant exactement connus, et P *étant un signal ext.-*

rieur au triangle, on mesure les angles

$$APB = a_1, \qquad BPC = a_2, \qquad PCB = a_3, \qquad BAP = a_4.$$

Les mesures comportant des erreurs, on demande de calculer les valeurs les plus probables a_1, a_2, a_3, a_4.

Données numériques :

$$A = 60^\circ.39'.32'', \qquad a_1 = 55^\circ.38'.\ 2'',$$
$$B = 81.\ 9.\ 0, \qquad a_2 = 112.32.52,$$
$$C = 38.11.28, \qquad a_3 = 45.54.\ 4,$$
$$a_4 = 64.46.10.$$

On calculera d'autre part quelles auraient dû être les valeurs de a_3 et de a_4, si les valeurs de a_1 et de a_2 avaient été exactes. (Juillet 1912.)

Composition. — *Théorie du temps moyen. Équation du temps. Discussion : l'équation du temps s'annule quatre fois par an.*

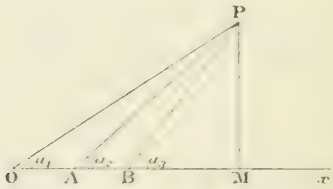
Épreuve pratique. — *Orientation à l'aide d'une étoile. Emploi d'une étoile polaire. Heure à laquelle il convient de faire l'observation pour que l'erreur du chronomètre soit sans influence sensible. Azimut correspondant de l'étoile.*

Application numérique :

$$\text{Æ} = 1^h 16^m 41^s,49;$$
$$\text{Ⓓ} = 88^\circ 41' 26'';$$
$$\lambda = 45^\circ 11' 22''.$$

(Novembre 1912.)

Composition. — *Influence de l'aberration sur les coor-*



données équatoriales Æ *et* Ⓓ *d'une étoile. Aberration*

annuelle en ♃ et ♀. Aberration annuelle en longitude et en latitude. Orbite d'aberration.

Influence de l'aberration diurne sur le moment du passage apparent d'une étoile au méridien d'un lieu.

Épreuve pratique. — *Rattachement d'un point* P *à une base* Ox *à l'aide de trois observations faites de trois points* O, A, B *de cette base.*

Mesures effectuées :

$$OA = a = 1435^{m},81, \qquad POX = a_1 = 47^{\circ}.27'.42'',$$
$$OB = b = 2186,43, \qquad PAX = a_2 = 59.55.45,$$
$$PBX = a_3 = 68.\ 8.20.$$

1° *On calculera le côté du triangle d'erreur des observations qui est dirigé vers le point* O, *et l'on figurera ce triangle.*

2° *On compensera de la façon la plus probable les angles mesurés* a_1, a_2, a_3 *de façon à assurer la convergence des rayons* OP, AP, BP, *et l'on calculera alors les valeurs de* $OM = x$, $MP = y$.

3° *On calculera la longueur du côté dirigé vers* O *du triangle d'erreur qui pourra subsister après la compensation.* (Juillet 1913.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. 1° *Équation de Kepler.*

2° *Étude de la chromosphère en dehors des éclipses.*

II. *Indiquer combien de relations et quelles relations doivent exister dans le problème des deux corps entre les douze coordonnées (cartésiennes) et projections des vitesses à un instant quelconque pour que les deux corps se choquent dans le mouvement étudié :* 1° *antérieurement et postérieurement à l'instant considéré;* 2° *postérieurement à l'instant considéré.*

Épreuve pratique. — *On examine, au moment de l'opposition, le spectre d'une planète de diamètre apparent notable. On suppose qu'à ce moment l'axe de rotation* Δ *de la planète est dans un plan perpendiculaire à la ligne de visée. On dispose la fente perpendiculairement à* Δ.

On étudie la région du spectre voisine de $\lambda = 0^{\mu},5$. *Dans cette région, deux raies dont les longueurs d'onde diffèrent de* $0^{\mu},0001$ *sont séparées sur la plaque par un intervalle de* 1^{mm}. *La hauteur du spectre est* 2^{mm}. *La vitesse équatoriale de la planète est* 10^{km} *par seconde. Calculer* l'inclinaison *des raies de Frauenhofer et celle des raies dues à l'absorption par l'atmosphère de la planète.*

(Juillet 1913.)

Marseille.

Composition. — *Exposer le calcul de l'ascension droite et de la déclinaison géocentriques d'une planète, connaissant les éléments de son orbite et sa position à une date sur cet orbite. Constantes de Gauss. Construction d'une éphéméride de la planète.*

Épreuve pratique. — *A la date* 1875,0 *les coordonnées moyennes de l'étoile* α *de l'Aigle sont :*

Ascension droite.....	$19^h 44^m 39^s,31$
Déclinaison boréale.....	$8° 32' 14'',7$

Calculer ses coordonnées moyennes à la date 1825,0.

On rappelle aux candidats que la précession annuelle en ascension droite et en déclinaison a pour expressions

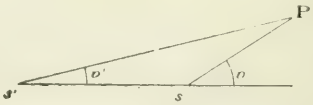
$$m + n \operatorname{tang} \delta \sin \alpha,$$
$$n \cos \alpha,$$

et l'on sait qu'on a, à la date de 1850,0, *les valeurs*

$$m = 46'',0593 \quad (\text{en arc}).$$
$$n = 20'',0515$$

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Une planète* P *décrit, suivant les*



lois de Kepler, une orbite elliptique de foyers S *et* S', *le Soleil étant supposé en* S.

1° *Démontrer que les vitesses angulaires* $\frac{dv}{dt}$ *et* $\frac{dv'}{dt}$ *des rayons vecteurs* SP *et* S'P *sont données par les formules*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(1 - e\cos v)^2 n}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{dv'}{dt} = \frac{(1 + e\cos v)^2 n}{(1 + 2e\cos v + v^2)(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}},$$

dans lesquelles e désigne l'excentricité de l'orbite, n le moyen mouvement horaire de P, *v l'anomalie vraie de* P, *v' l'angle* $\widehat{SS'P}$, *t le temps mesuré en heures de temps moyen.*

Trouver les maximums et les minimums de ces vitesses quand P *parcourt son orbite.*

2° *Trouver les développements de* $\frac{dv}{dt}$ *et de* $\frac{dv'}{dt}$ *suivant les puissances de e jusqu'aux termes en* e^3 *exclusivement et montrer que le mouvement du rayon vecteur* S'P *est uniforme en supposant* e^2 *négligeable.*

3° *Dans le cas où l'on a* $e = 0,05491$ *et* $n = 32'56'',45$, *calculer l'écart entre le maximum et le minimum de* $\frac{dv}{dt}$ *et l'écart analogue pour* $\frac{dv'}{dt}$.

Épreuve pratique. — *En un certain lieu, on a trouvé pour la hauteur du Soleil* 63° 56′ 50″ *l'heure moyenne étant* $0^h 49^m 25^s$, *et le temps moyen à midi vrai* $1^m 30^s$. *La déclinaison du Soleil est* 23° 27′. *Quelle est la latitude du lieu?*

(Novembre 1912.)

Composition écrite. — 1° *Expliquer ce que l'on appelle* inclinaison, collimation *et* azimut *d'une lunette méridienne. Montrer comment on détermine ces trois constantes.*

2° *Dans une orbite parabolique, démontrer que le cercle passant par le foyer, le sommet et un point* M *de la parabole, détermine sur la tangente au sommet un segment proportionnel au temps mis par l'astre pour aller du périhélie au point* M *de la parabole.*

N. B. — *On rappelle aux candidats que, dans une orbite parabolique, l'anomalie vraie v est liée au temps correspondant t par la formule*

$$\frac{1}{3}\tan g^3\frac{v}{2} + \tan g\frac{v}{2} = \frac{h}{q^2}(t - T).$$

dans laquelle h désigne la constante des aires, q la distance périhélie et T *l'époque du passage de l'astre au périhélie.*

Épreuve pratique. — *Pour une planète, la longitude vraie dans l'orbite est*

$$180^\circ 15' 20'',$$

l'inclinaison

$$6^\circ 23' 10''$$

et la longitude du nœud

$$128^\circ 11' 50''.$$

Calculer la longitude et la latitude héliocentriques.

(Juin 1913.)

Composition écrite. — 1° *Exposer la théorie des parallaxes pour les planètes. Influence de la parallaxe sur les observations méridiennes et sur les observations équatoriales.*

2° *Négligeant l'excentricité de l'orbite apparente du Soleil, on suppose que cette orbite soit un cercle incliné de* $23^\circ 27'$ *sur le plan de l'équateur. Trouver ce que devient dans ce cas l'*équation du temps. *Établir une formule permettant de calculer cette équation en fonction de la longitude du Soleil et trouver les zéros, les maximums et les minimums de cette quantité.*

Épreuve pratique. — *Sur une sphère dont le rayon est* 10^m, *les côtés d'un triangle sphérique sont respectivement* 3^m, 4^m *et* 5^m.

Calculer les angles de ce triangle avec la précision que comportent les tables à cinq décimales.

(Novembre 1913.)

Montpellier.

Épreuve écrite. *Définition et principales propriétés des fonctions de Bessel. En particulier, démontrer les formules*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi,$$

où $J_n(x)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ fonction de Bessel. Indiquer (sans détails, ni calculs) quelques applications à l'Astronomie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre par la méthode de Kœnigs l'équation de Kepler*

$$u - e \sin u = \zeta$$

pour

$$\zeta = 31^\circ, \qquad \log e = \bar{1},38976.$$

Au bout de deux (ou trois) applications de la méthode, dire sur quelle approximation on peut compter.

(Juin 1913.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Mouvement parabolique des comètes. Détermination du temps. Détermination des éléments paraboliques connaissant, dans l'espace, la position et la vitesse de la comète à l'instant t_0.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *A une date déterminée, les coordonnées astronomiques d'une étoile* E *sont* $\mathrm{A} = 19^\circ 20'$, *déclin.* $= 7^\circ 31'$. *Calculer l'ascension droite de l'étoile équatoriale qui se lève en même temps que* E. *Quelle est la différence des azimuts des deux étoiles au moment de leur lever? La latitude du lieu de l'observation est* $50^\circ 38' 44''$.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Montrer comment on peut déterminer les éléments d'une orbite elliptique quand on a la position* $X_0\, Y_0\, Z_0$ *et la vitesse* $X'_0\, Y'_0\, Z'_0$ *à un instant donné* t_0.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre l'équation de Kepler*

$$u - e \sin u = \zeta$$

pour les valeurs suivantes de e et de ζ :

$$\log e = \bar{1},42369, \qquad \zeta = 19^\circ 35' 40''.$$

Poursuivre les calculs jusqu'à être assuré que l'erreur commise sur u ne dépasse pas $2'$ *en valeur absolue. Combien faudrait-il faire d'approximations ultérieures pour obtenir une erreur au plus égale à* $1''$? (Juin 1913.)

Épreuve écrite. — *Exposer dans ses grandes lignes la solution du problème des deux corps dans l'espace. Introduire les éléments d'une orbite dans le mouvement relatif d'une planète autour du Soleil, et expliquer comment on fixe à un instant donné la position de la planète sur son orbite.*

Note. — *On admettra, sans rappeler la démonstration, que l'équation de Kepler a une solution et une seule; et l'on ne parlera pas des procédés de calcul de cette solution.*

Épreuve pratique. — *En un lieu donné, on admettra que le crépuscule commence lorsque le Soleil atteint l'horizon, et qu'il se termine lorsque le Soleil possède une hauteur égale à* -18° *(c'est-à-dire lorsque l'angle du rayon visuel passant par le Soleil, avec l'horizon, est égal à* -18°*). Ceci posé, on demande quelle est la latitude des lieux terrestres pour lesquels le jour où la déclinaison du Soleil est* D, *le crépuscule cesse à* 7^h *de temps vrai?*

Cette latitude existe-t-elle toujours, quelle que soit la valeur de D? *Donnant à* D *une valeur numérique (au choix du candidat) telle que le problème soit possible, calculer la latitude correspondante.*

(Novembre 1913.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *On considère trois axes de coordonnées ayant leur origine au centre* T *de la Terre :* Tz *parallèle à la direction* LS *qui va du centre de la Lune au centre du Soleil;* Ty *mené perpendiculairement à* Tz *dans le plan passant par* Tz *et l'axe* TP *de la Terre, mais de manière à faire un angle aigu avec* TP, P *étant le pôle boréal; enfin* Tx *perpendiculaire au plan* yTz, *de manière que le trièdre* Txyz *présente la disposition directe.*

Soit une époque voisine de celle du milieu d'une éclipse de Soleil. Calculer pour cette époque :

1° *L'ascension droite* $\mathcal{R}$ *et la déclinaison* $\mathcal{D}$ *de* Tz;
2° *Les coordonnées* x, y, z *du centre de la Lune;*
3° *Les coordonnées* ξ, η, ζ *d'un lieu terrestre* M;
4° *Les demi-angles au sommet des cônes d'ombre et de*

pénombre, ainsi que les rayons de leurs traces sur le plan xTy ;

5° *Les rayons de leurs traces sur le plan parallèle au plan* xTy *mené par le lieu* M ;

6° *Les valeurs des quatre dérivées* x', y', ξ', η' *prises par rapport au temps. Déduire de là l'heure approximative d'un contact des disques lunaire et solaire ainsi que l'angle au pôle correspondant.*

On aurait, pour l'époque considérée, les coordonnées équatoriales géocentriques A *et* D *de la Lune, et celles* A' *et* D' *du Soleil, les distances* r *et* r' *de ces deux astres à la Terre, l'angle horaire* H *de la direction* Tz *par rapport au premier méridien.*

On aurait d'ailleurs aussi les rayons linéaires R *et* R' *de la Lune et du Soleil, ainsi que les coordonnées géographiques du lieu* M *et sa distance* ρ *au centre de la Terre.*

Épreuve pratique. — *Appliquer le théorème de Legendre à la résolution du triangle géodésique tracé sur une sphère de* 6370^{km} *de rayon, dont les côtés ont pour longueur* 700^{km}, 550^{km}, 300^{km}. (Juin 1911.)

I. *Nutation de l'axe de la Terre. On fera abstraction du déplacement séculaire de l'écliptique.*

II. *On considère une éclipse de Lune. Calculer les heures des contacts, les angles au pôle de ces contacts, ainsi que l'heure de la plus courte distance des centres.*

III. *Expliquer comment on peut déterminer les éléments elliptiques d'une planète à l'aide de trois observations.*

(Juin 1912.)

Épreuve écrite. — 1° *Détermination de la figure de la Terre.*

2° *Dans un triangle sphérique, on connaît un côté* c, *la différence* $a - b$ *des deux autres, et la somme* $A + B$ *des angles opposés. Déterminer les côtés* a, b *et les angles* A, B, C.

Épreuve pratique. — *A Nancy, dont la latitude est*

$$\varphi = 48^\circ 41' 31'',$$

on a observé à un certain instant l'azimut A *et la distance zénithale* z *d'une étoile*

$$A = 225^\circ 43' 20'', \qquad z = 25^\circ 44' 30''.$$

Calculer l'heure sidérale de cet instant. On donne l'ascension droite R *de l'étoile*

$$R = 9^\circ 17' 12'',25.$$

(Octobre 1912.)

I. *Connaissant les dimensions de l'ellipsoïde terrestre et la latitude géographique* φ *d'un point de cet ellipsoïde, trouver la latitude géocentrique de ce point, sa distance au centre de la Terre et le rayon de courbure de l'ellipse méridienne au même point. Longueur du mètre.*

II. *Nutation de l'axe de la Terre.*

III. *Aberration annuelle des étoiles.* (Juin 1913.)

I. *Expliquer en détail comment on établit que le mouvement des planètes satisfait aux trois lois de Kepler.*

II. *On considère une éclipse de lune. Calculer les heures des contacts, les angles au pôle de ces contacts, ainsi que l'heure de la plus courte distance des centres.*

(Octobre 1913.)

Rennes.

Composition écrite. — *Réfraction astronomique.*

Épreuve pratique. — *Résoudre un triangle sphérique connaissant les trois côtés :*

$$a = 38^\circ 17' 20'',$$
$$b = 50^{\mathrm{g}},1938,$$
$$c = 57^\circ 34' 18''.$$

(a et c sont donnés en degrés, b en grades.)

(Juin 1911.)

Composition écrite. — *Différents systèmes de coordonnées astronomiques. Changement de coordonnées.*

Épreuve pratique. — *Résoudre un triangle sphérique connaissant deux côtés b, c et l'angle compris* A :

$$b = 98^{\gamma},1830,$$
$$c = 49,2135,$$
$$A = 51,1532.$$

(Novembre 1911.)

Composition écrite. — *Éclipses.*

Épreuve pratique. — *On donne les trois côtés d'un triangle sphérique*

$$a = 65^{\circ}.27'.18'',32;$$
$$b = 84.35.26,84;$$
$$c = 95.43.53,76:$$

1° *Calculer les angles* A, B, C.

2° *Quels accroissements éprouvent ces trois angles quand les côtés reçoivent les petits accroissements respectifs :*

$$\Delta a = 3'',2; \qquad \Delta b = -4'',5; \qquad \Delta c = 6'',7.$$

(Juin 1912.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Construction d'une éphéméride donnant les coordonnées équatoriales géocentriques d'une planète.*

II. *Définition et détermination des constantes instrumentales du cercle méridien.*

Épreuve pratique. — *Calculer, en temps moyen, l'heure du lever de l'étoile α Dauphin, le* 30 *mai* 1910. *On trouvera les coordonnées de cette étoile, pour cette date, dans la* Connaissance des Temps de 1910 (p. 499). *On tiendra compte de l'effet de la réfraction. On adoptera, pour lieu,*

Toulouse (Observatoire), dont on prendra la position géographique, page 17* *de la Table de la* Connaissance des Temps. (Juillet 1911.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Interpolation; différences; formule de Newton et formules analogues. Application aux Tables astronomiques; on insistera, en particulier, en se servant de la* Connaissance des Temps, *sur le cas de la Lune.*

II. *Emploi du niveau des collimateurs et du bain de mercure dans les cercles méridiens.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne ci-dessous les ascensions droites* A, A′ *du Soleil et de Vénus pour midi moyen de Paris du* 5 *au* 7 *juillet* 1912.

1° *On demande, en temps moyen de Paris, pour quel instant on a* A = A′ *et quelle est cette valeur commune de l'ascension droite des deux astres.*

2° *Transformer le temps moyen trouvé pour l'instant considéré en temps sidéral de Paris.*

3° *Dans quel méridien se trouvent les deux astres au moment de cette conjonction, sachant que le temps sidéral à midi moyen, à Paris, le* 5 *juillet* 1912 *est égal à* $6^h 52^m 25^s$.

	Soleil.	Vénus.
	h m s	h m s
1912 juillet 5.....	6.56.43,06	6.56.15,32
» 6.....	7. 0.49,89	7. 1.36,12
» 7.....	7. 4.56,38	7. 6.56,49

(Juillet 1912.)

ERRATA.

1915. Page 55, ligne 5, *au lieu de* $\sin^3 x - \sin^2 x = y$, *lire* $\sin^3 x - \sin^2 x + y$.

Page 55, ligne 12, *au lieu de*

$$\sqrt[6]{a}\sqrt{a} - \sqrt{a^3 + x^3},$$

lire

$$\sqrt[6]{a}\sqrt{a} + \sqrt{a^3 - x^3}.$$

[M¹ 8a]

NOTE SUR LA NÉPHROÏDE DE PROCTOR;

PAR M. F. BALITRAND.

La *néphroïde de Proctor* est la courbe engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{a}{2}$ roulant extérieurement sur un cercle de rayon a. C'est une épicycloïde qui présente deux points de rebroussement aux extrémités d'un diamètre du cercle fixe et deux sommets, dans une direction perpendiculaire, sur un cercle concentrique de rayon $2a$. Elle est susceptible de nombreux modes de génération simples, soit ponctuels, soit tangentiels; ces derniers particulièrement remarquables. Nous en indiquerons plusieurs dans ce qui suit.

Prenons un cercle de centre O et de rayon a. Soient AA′ un de ses diamètres, fixe par hypothèse, et M un point variable de sa circonférence. Traçons le cercle qui lui est tangent extérieurement en M et de rayon $\frac{a}{2}$. Soit ω son centre. Prenons sur lui un point P tel que arc MP = arc MA. Le lieu du point P, quand le point M varie, est la néphroïde de Proctor.

Abaissons de M la perpendiculaire MQ sur AA′. Puisque arc MA = arc MP et puisque le rayon de ω est la moitié de celui de O, MP et MQ sont égaux. Pour la même raison, si l'on mène la tangente commune en M aux deux cercles, qui coupe AA′ en T, les angles QMT et PMT sont égaux. Par suite, la tangente MT est perpendiculaire sur PQ en son milieu. Donc :

Si d'un point M *d'un cercle, on abaisse la perpendiculaire* MQ *sur un de ses diamètres fixe* AA', *et si l'on prend le symétrique* P, *de* Q, *par rapport à la tangente en* M, *le lieu de* P, *quand* M *varie sur le cercle, est une néphroïde ayant pour points de rebroussement* A *et* A'.

De plus, la tangente en P à la néphroïde est la droite PT. En effet, le triangle TPQ étant isoscèle, la droite TP rencontre OM en un point M_1, tel que $MM_1 = OM$. Autrement dit, le point M_1 est le point diamétralement opposé à M sur le cercle ω. Par suite, TP est perpendiculaire à PM. Mais M étant le centre instantané de rotation, la droite PM est la normale en P; par suite, TP est la tangente. On peut ajouter que cette tangente fait avec AA' un angle double de MOA et, par conséquent, TM est la bissectrice de l'angle PTQ.

Puisque $MP = MQ$, le point M appartient à une parabole ayant P pour foyer et AA' pour directrice. La tangente en M à cette parabole, qui est perpendiculaire sur PQ, coïncide avec MT. Donc :

Le lieu des foyers des paraboles tangentes à un cercle et ayant, comme directrice commune, un diamètre fixe de ce cercle, est une néphroïde ayant pour points de rebroussement les extrémités du diamètre fixe.

Traçons le cercle de centre M et de rayon MQ. Il touche AA' en Q et la néphroïde en P. La droite PQ prolongée rencontre le diamètre BB', perpendiculaire à AA', en Q_1 et l'on a $QQ_1 = OM = a$. L'enveloppe de PQ est donc une hypocycloïde à quatre rebrousse-

ments ou astroïde, ayant ses points de rebroussement en A, A′, B et B′. Par suite :

L'enveloppe d'un cercle, dont le centre décrit un cercle donné, et qui reste tangent à un diamètre de ce cercle, est une néphroïde. La droite qui joint les points de contact sur le diamètre et sur la néphroïde enveloppe une astroïde.

On peut encore dire, si l'on veut, que :

Le lieu des points équidistants d'une néphroïde et de sa ligne des rebroussements est le cercle décrit sur le segment de droite, qui joint les points de rebroussement, comme diamètre.

Désignons par φ l'angle MOA. Nous savons que la tangente PT fait avec AA′ un angle égal à 2φ; c'est-à-dire que TP et TA sont symétriques par rapport à TM. D'où le mode de génération suivant de la néphroïde :

De chaque point T *d'un diamètre fixe* AA′ *d'un cercle, on mène la tangente* TM *à ce cercle et l'on prend la symétrique* TP *de* AA′ *par rapport à cette tangente. L'enveloppe de* TP *est une néphroïde.*

Le triangle OTM_1 est isoscèle, puisque T appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base OM_1. L'angle en M_1 est donc égal à MOA, c'est-à-dire à φ. Menons par M_1 une parallèle M_1N à AA′, faisant par suite avec OM_1 le même angle φ. Le lieu de M_1 étant un cercle de centre O et de rayon $2a$; on voit que si NM_1 est un rayon lumineux, M_1T est le rayon réfléchi par ce cercle. D'où ce théorème :

La caustique par réflexion d'un cercle, pour des

rayons lumineux parallèles, est une néphroïde de Proctor.

Joignons PM. Dans le triangle rectangle PMM_1, l'angle en M est égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$. D'autre part, dans le triangle OMQ, l'angle OMQ est aussi égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Autrement dit, si QM est un rayon lumineux, PM prolongé est le rayon réfléchi par le cercle fixe. L'enveloppe de PM est donc une néphroïde. Mais PM, nous le savons, est la normale en P à la néphroïde lieu de ce point; son enveloppe est donc la développée de cette néphroïde. Ainsi :

La développée d'une néphroïde de Proctor est une autre néphroïde concentrique à la première. On l'obtient en prenant l'homothétique de celle-ci; le pôle d'homothétie étant le centre commun et le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$, *et en la faisant ensuite tourner de* 90° *autour du centre commun.*

La construction, bien connue, qui donne le point de contact du rayon réfléchi avec son enveloppe, fournit ici le centre de courbure de la néphroïde. On l'obtient en projetant sur MP le milieu du rayon OM. Nous l'obtiendrons plus loin par une autre méthode.

Projetons le point A en R sur MT et prenons le symétrique S de A par rapport à R. Ce point se trouve sur PT. Le lieu du point R étant, d'après une propriété classique, une cardioïde, il en est de même de celui du point S. D'ailleurs, l'égalité des deux triangles OMQ, MPM_1 montre que le cercle de centre M_1, tangent extérieurement en M au cercle O, passe par S. Comme arc MS = arc MA, il en résulte que le lieu du point S

est celui d'un point d'un cercle de rayon a, roulant extérieurement sur un cercle égal; ce qui prouve d'une autre façon que ce lieu est une cardioïde. La normale en S à cette cardioïde est la droite SM, puisque M est le centre instantané de rotation. Cette droite est d'ailleurs bissectrice de l'angle ASP, car les angles ASM et MSP sont tous deux égaux à $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. Donc :

La néphroïde de Proctor est la caustique par réflexion de la cardioïde pour des rayons lumineux issus du point de rebroussement de cette dernière.

PM prolongé rencontre le cercle O en un second point P_1. Nous avons vu que MO est la bissectrice de l'angle QMP_1; par suite,

$$MP_1 = 2MQ \qquad \text{et} \qquad \text{arc } MP_1 = 2 \text{ arc } MA.$$

Comme, d'après ce qui précède, la droite MP_1 enveloppe une néphroïde, on a pour cette courbe le mode de génération suivant :

Si deux mobiles partant d'un même point se meuvent sur un cercle, dans le même sens, avec des vitesses dans le rapport de 3 à 1, la droite qui les joint enveloppe une néphroïde de Proctor.

De là, on peut déduire une construction du centre de courbure de la néphroïde. En effet, soit $M'P'_1$ une nouvelle position de la droite MP_1, coupant la première au point C. Les deux triangles MCM' et $P_1CP'_1$ sont semblables comme équiangles et, par hypothèse, on a

$$MM' = \frac{1}{3} P_1P'_1.$$

Donc

$$CM = \frac{1}{3} CP_1 = \frac{1}{4} MP_1.$$

Ainsi, à la limite, lorsque $M'P'_1$ se rapproche indéfiniment de MP_1, le point C, qui devient le point de contact de MP_1 avec son enveloppe, s'obtient en prenant

$$MC = \frac{1}{4} MP_1.$$

Comme ce point est le centre de courbure de la néphroïde, puisque MP_1 est normale en P à cette courbe, on a la construction géométrique suivante :

Le centre de courbure en un point de la néphroïde s'obtient en projetant sur la normale en ce point le milieu du rayon correspondant du cercle fixe.

Soit ω_1 le milieu de OM. Décrivons un cercle sur $\omega_1 M$ comme diamètre; il passe en C. Décrivons de même le cercle de centre O et de rayon $O\omega_1$; il est tangent au précédent en ω_1. Il coupe le diamètre BB', perpendiculaire à AA', en deux points B_1 et B'_1. Les deux angles $CM\omega_1$ et $B_1O\omega_1$ sont égaux tous les deux à $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Il en résulte que les deux arcs $C\omega_1$ et $B_1\omega_1$ sont égaux; car ils sont comptés sur des cercles de rayons $\frac{a}{4}$ et $\frac{a}{2}$. Donc le lieu du point C se confond avec le lieu décrit par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un cercle de rayon double; ce lieu est donc une néphroïde; ce qui prouve, comme nous l'avons déjà vu, que la développée d'une néphroïde est une autre néphroïde.

Rectification et quadrature. — La rectification et la quadrature de la néphroïde peuvent s'obtenir géométriquement de plusieurs façons. Celle que nous allons indiquer est basée sur la remarque suivante.

Le cercle décrit sur OM comme diamètre passe en Q et comme MQ = MP, on a aussi

$$\text{arc}\,\text{MQ} = \text{arc}\,\text{MP} = \text{arc}\,\text{MA}.$$

Donc le point Q est fixe sur le cercle de diamètre OM, et si l'on fait rouler celui-ci intérieurement sur le cercle O, il engendre le diamètre AA'; c'est le théorème de Cardan.

D'autre part, si l'on fait rouler une courbe mobile sur une courbe fixe, d'abord sur la convexité, puis sur la concavité de celle-ci, de sorte que les mêmes points de la courbe mobile coïncident avec les mêmes points de la courbe fixe dans les deux mouvements, on a les deux formules suivantes :

$$d\sigma = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right) r\,ds, \qquad d\sigma_1 = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) r\,ds,$$

où ds désigne l'élément d'arc commun aux deux courbes au point de contact; ρ et ρ_1 les rayons de courbure des mêmes courbes en ce point; r le rayon vecteur du point décrivant; $d\sigma$ et $d\sigma_1$ les éléments d'arc des deux roulettes.

Ces formules sont bien connues. D'ailleurs, leur démonstration est immédiate, si l'on remplace les deux courbes, fixe et mobile, par des polygones infinitésimaux inscrits.

Dans le cas présent, où les courbes fixe et mobile sont deux cercles, ρ et ρ_1 sont constants et égaux respectivement à $\frac{a}{2}$ et a; r désigne MP.

Pour le roulement extérieur (néphroïde), on a donc

$$d\sigma = \frac{3.\text{MP}}{a}\,ds;$$

pour le roulement intérieur (diamètre AA′),

$$d\sigma_1 = \frac{\mathrm{MP}}{a}\, ds;$$

d'où

$$d\sigma = 3\, d\sigma_1.$$

En intégrant, on voit que l'arc de néphroïde AP est égal à 3.AQ. D'où ce théorème :

La longueur d'un arc de néphroïde, compté à partir du point de rebroussement, est égale à trois fois la distance de ce point de rebroussement à la projection, sur le diamètre des rebroussements, du point correspondant du cercle fixe.

La longueur totale de la néphroïde est égale à $12a$. La quadrature s'obtient par des considérations analogues. En faisant rouler une courbe mobile, d'abord sur la convexité, puis sur la concavité d'une courbe fixe, le rayon vecteur du point décrivant balaye chaque fois une aire limitée par l'arc de la courbe fixe, l'arc de la roulette et les deux lignes droites qui joignent les premières et dernières extrémités de ces arcs. Chacune de ces aires se décompose en quadrilatères mixtilignes infinitésimaux dont chacun comprend : 1° un petit secteur curviligne qui a pour sommet le point décrivant et pour base l'élément de la courbe mobile; 2° un second secteur qui a son sommet au point de contact des deux courbes et pour base l'élément de la roulette.

Les premiers sont évidemment égaux dans les deux roulements. Quant aux seconds, ils ont pour expression

$$d\Sigma = \frac{1}{2}\, r\, d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right) r^2\, ds,$$

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2}\, r\, d\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) r^2\, ds,$$

suivant que les convexités des deux courbes, fixe et mobile, sont opposées ou non.

Dans le cas présent, où celles-ci sont des cercles de rayon a et $\frac{a}{2}$ respectivement, on a

$$d\Sigma = 3.d\Sigma_1,$$

d'où

$$\Sigma = 3.\Sigma_1,$$

Σ représente la surface limitée par l'arc de néphroïde AP, par l'arc du cercle fixe MA et par l'arc du cercle mobile MP; Σ_1 la surface limitée par le segment AQ et par les arcs MA et MQ des cercles fixe et mobile.

A la surface Σ, ajoutons le segment de cercle ω limité par la corde MP; et de même à la surface Σ_1 celui du cercle ω_1, limité par la corde MQ. Observons d'ailleurs que ce dernier est égal à Σ_1. Il en résulte que la surface comprise entre l'arc de néphroïde AP, l'arc de cercle MA et la droite MP, est double de la surface comprise entre AQ, QM et l'arc MA. D'où ce théorème :

La surface comprise entre un arc de néphroïde, compté à partir du point de rebroussement, l'arc correspondant du cercle fixe et la droite qui joint les extrémités de ces arcs, est égale au segment du cercle fixe limité par la corde menée par le point correspondant du cercle fixe, perpendiculairement au diamètre des rebroussements.

La surface totale de la néphroïde est égale à trois fois celle du cercle fixe.

[I19a]

SUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

$$x^2 + y = z^2, \qquad x + y^2 = t^2;$$

PAR M. C.-A. LAISANT.

Ce système, signalé dans l'*Algèbre* d'Euler (t. II, n° 239), a fait l'objet d'une question posée récemment dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (¹). On demande s'il peut y avoir des solutions entières. L'impossibilité est presque évidente, en écrivant les deux équations :

$$y = (z - x)x + (z - x)z,$$
$$x = (t - y)y + (t - y)t;$$

$z - x$ et $t - y$ sont des entiers positifs. En vertu de la première équation, $y > x$; en vertu de la seconde, $x > y$; d'où l'impossibilité, au moins en nombres entiers positifs.

Pour le cas de racines négatives, on n'a qu'à mettre les signes en évidence, d'où les deux systèmes

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - x = t^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 - y = z^2,\ x + y^2 = t^2,$$

et une démonstration analogue à la précédente s'applique à chacun d'eux.

Le seul cas d'exception est celui où l'on a $x = z$ (ou bien $y = t$). Alors, $y = 0$, $x = z = t^2$, solution évidente.

On peut se proposer la recherche des racines com-

(¹) N° 4418 (1914, p. 147), par M. T. ONO.

mensurables, s'il en existe, du système proposé. La solution est tout entière contenue dans les deux identités suivantes, qui n'en font qu'une, car la seconde se déduit de la première par la simple permutation des deux lettres :

$$\left[\frac{b(2a^2+b)}{1-4ab}\right]^2+\frac{a(2b^2+a)}{1-4ab}=\left[\frac{a+b^2-2a^2b}{1-4ab}\right]^2,$$

$$\left[\frac{a(2b^2+a)}{1-4ab}\right]^2+\frac{b(2a^2+b)}{1-4ab}=\left[\frac{b+a^2-2b^2a}{1-4ab}\right]^2.$$

En prenant pour a et b deux quantités commensurables arbitraires, positives ou négatives, et posant

$$x=\frac{b(2a^2+b)}{1-4ab},\qquad y=\frac{a(2b^2+a)}{1-4ab},$$

$$z=\frac{a+b^2-2a^2b}{1-4ab},\qquad t=\frac{b+a^2-2b^2a}{1-4ab},$$

on aura une solution du système proposé, en valeurs commensurables.

On peut remarquer que a et b représentent respectivement les différences $z-x$ et $t-y$.

Si l'on prend pour a et b des valeurs positives, il faudra, pour que les racines x et y soient positives, que l'on ait $ab<\frac{1}{4}$.

D'après l'une des remarques précédentes, on peut résoudre la question que voici, laquelle est entièrement déterminée : « Connaissant les différences $z-x$ et $t-y$, déterminer les quatre nombres x, y, z, t de telle sorte qu'on ait $x^2+y=z^2$, $x+y^2=t^2$. »

Il y aurait sans doute sur cette question d'intéressantes observations à faire. Je me borne, en terminant, à présenter trois exemples, correspondant aux trois cas possibles, savoir x et y positifs, négatifs ou de signes

contraires :

1° $x = \frac{13}{12}, \quad y = \frac{5}{6}, \quad z = \frac{17}{12}, \quad t = \frac{3}{4};$

$$\left(\frac{13}{12}\right)^2 + \frac{5}{6} = \left(\frac{17}{12}\right)^2,$$

$$\frac{13}{12} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

2° $x = -\frac{8}{7}, \quad y = -\frac{9}{7}, \quad z = \frac{1}{7}, \quad t = \frac{5}{7};$

$$\left(\frac{8}{7}\right)^2 - \frac{9}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^2,$$

$$-\frac{8}{7} + \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2.$$

3° $x = \frac{3}{5}, \quad y = -\frac{1}{5}, \quad z = \frac{2}{5}, \quad t = \frac{4}{5};$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2,$$

$$\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

[O¹3e]

NOTE SUR LA TORSION;

PAR M. J. HAAG,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Imaginons une courbe (C), définie comme arête de rebroussement de l'enveloppe du plan

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des fonctions données d'un paramètre t.

Proposons-nous de calculer la torsion $\frac{1}{T}$ de cette courbe. On sait que les coordonnées x, y, z du point de contact du plan (1) avec (C) sont définies par l'équation (1) et les suivantes :

$$(2) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

$$(3) \qquad A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

les accents étant des indices de dérivation par rapport à t. Cela posé, désignons par (a, b, c), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. Cette dernière droite est perpendiculaire au plan (1); on a donc

$$(4) \qquad a_2 = \lambda A, \qquad b_2 = \lambda B, \qquad c_2 = \lambda C,$$

avec

$$(5) \qquad \lambda^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Écrivons maintenant les formules de Frenet :

$$(6) \qquad \frac{da_2}{ds} = \frac{a_1}{T}, \qquad \frac{db_2}{ds} = \frac{b_1}{T}, \qquad \frac{dc_2}{ds} = \frac{c_1}{T}.$$

Multiplions-les respectivement par a_1, b_1, c_1 et ajoutons. Il vient

$$(7) \qquad \frac{1}{T} = a_1 \frac{da_2}{ds} + b_1 \frac{db_2}{ds} + c_1 \frac{dc_2}{ds}.$$

Or, on sait que

$$a_1 = cb_2 - bc_2, \qquad b_1 = ac_2 - ca_2, \qquad c_1 = ba_2 - ab_2.$$

La formule (7) s'écrit, dès lors,

$$(8) \qquad \frac{1}{T} = \begin{vmatrix} \frac{da_2}{ds} & \frac{db_2}{ds} & \frac{dc_2}{ds} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} - \frac{\lambda^2}{s'^2} \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Or, les équations (1), (2), (3), dérivées totalement par rapport à t, entraînent les suivantes :

$$(9) \qquad Ax' + By' + Cz' = 0,$$

$$(10) \qquad A'x' + B'y' + C'z' = 0,$$

$$(11) \quad A''x' + B''y' + C''z' = -(A'''x + B'''y + C'''z + D''') = k,$$

k étant obtenu par élimination de x, y, z entre (1), (2), (3) et (11), ce qui donne

$$(12) \qquad k = -\frac{\Delta}{\delta},$$

en posant

$$(13) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Si nous résolvons maintenant le système (9), (10), (11) par rapport à x', y', z', nous avons

$$(14) \qquad x' = \frac{k}{\delta}(BC' - CB'), \qquad y' = \frac{k}{\delta}(CA' - AC'),$$
$$z' = \frac{k}{\delta}(AB' - BA').$$

Portant dans (8) et développant suivant la dernière ligne, il vient

$$(15) \quad \frac{1}{T} = -\frac{\lambda^2}{s'^2}\frac{k}{\delta}[(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2].$$

Mais, si l'on élève les équations (14) au carré et qu'on les ajoute, on voit que le crochet de (15) égale $\frac{\delta^2}{k^2}s'^2$. Finalement, (15) devient

$$\frac{1}{T} = -\frac{\lambda^2\delta}{k}$$

ou, en tenant compte de (5) et (12),

$$(16) \qquad \frac{1}{T} = \frac{\delta^2}{(A^2 + B^2 + C^2)\Delta}.$$

On peut aussi établir cette formule, en partant de la formule bien connue

$$(17) \quad \frac{1}{T} = \frac{-\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}.$$

On a, en dérivant (9) et tenant compte de (10),

$$(18) \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

Dérivons cette équation, ainsi que (10) et tenons compte de (11); nous obtenons

$$(19) \quad Ax''' + By''' + Cz''' = -(A'x'' + B'y'' + C'z'') = k.$$

Les équations (9), (18), (19), résolues par rapport à A, B, C, nous donnent

$$(20) \quad A = \frac{k(y'z'' - z'y'')}{D}, \qquad B = \frac{k(z'x'' - x'z'')}{D},$$
$$C = \frac{k(x'y'' - y'x'')}{D},$$

en désignant par D le déterminant qui est au numérateur de (17). La formule (17) peut alors s'écrire

$$(21) \quad \frac{1}{T} = -\frac{k^2}{D(A^2 + B^2 + C^2)} = -\frac{\Delta^2}{\delta^2 D(A^2 + B^2 + C^2)},$$

en tenant compte de (12).

Faisons maintenant le produit δD, lignes par lignes. On trouve, en tenant compte des équations (9), (10),

(11), (18), (19) et posant

$$A''x'' + B''y'' + C''z'' = \mu, \qquad A'x''' + B'y''' + C'z''' = \rho,$$
$$A''x''' + B''y''' + C''z''' = \theta,$$

$$(22) \qquad \delta D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & -k & \mu \\ k & \rho & \theta \end{vmatrix} = k^3 = -\frac{\Delta^3}{\delta^3}.$$

Portant dans (21), on retrouve la formule (16).

[A5]

GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE CONNUE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Si l'on pose

$$(1) \qquad (m, p) = \frac{A_m \times A_{m-1} \times \ldots \times A_{m-p+1}}{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p},$$

A_n étant une expression qui dépend de n, on a

$$(2) \quad (m, p) - (m-1, p) = (m-1, p-1) \times \frac{A_m - A_{m-p}}{A_p}.$$

Pour $A_n = n$, et en supposant m entier, cela donne

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}.$$

Pour $A_n = x^n - 1$, on a

$$(m, p) = (m-1, p) + (m-1, p-1) \times x^{m-p};$$

il en résulte que l'expression

$$\frac{(x^m - 1)(x^{m-1} - 1)\ldots(x^{m-p+1} - 1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^p - 1)},$$

où l'on suppose m entier et $p \leqq m$, se réduit à un polynome entier en x. Ce résultat a été donné par Gauss (*Summatio quarumdam serierum singularium*).

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Au sujet de la question* 2212 (1913, p. 480). — La solution de cette question publiée dans le volume de 1914, p. 430, consiste en une simple vérification analytique. La *détermination géométrique* de la tangente visée par l'énoncé peut s'effectuer comme suit (le lecteur étant prié de faire la figure telle que la définit l'énoncé en plaçant, en outre, la lettre S au point de rencontre de PU et MT) :

Entre les différentielles des arcs décrits simultanément par les points M, N, P sur leurs trajectoires respectives, on a les relations

$$\frac{d(M)}{d(N)} = \frac{MT}{NT}, \qquad \frac{d(N)}{d(P)} = \frac{NO.\,NU}{PO.\,PU}, \qquad \frac{d(P)}{d(M)} = \frac{PS}{MS},$$

d'où, si l'on fait le produit de ces trois égalités membre à membre,

$$\frac{MT.\,NO.\,NU.\,PS}{NT.\,PO.\,PU.\,MS} = 1.$$

Mais on a

$$\frac{MT}{PU} = \frac{MS}{PS}.$$

Il vient donc

$$\frac{NU}{NT} = \frac{PO}{NO},$$

et, par suite, si l'on tire la parallèle UV à OT,

$$\frac{NV}{NO} = \frac{PO}{NO},$$

d'où NV = PO, ou OV = PN. C. Q. F. D.

M. d'Ocagne. — *Au sujet d'une Note récente de M. F.*

Balitrand (*N. A.*, 1915, p. 1). — Dans cette Note, où il retrouve (p. 8) la construction que j'ai donnée jadis en ce recueil (1891, p. 86) pour le centre de courbure de la syntractrice, l'auteur énonce (au bas de la page 6) un autre théorème que j'ai, au milieu de plusieurs autres, fait également paraître dans le même recueil (*question* 1953, posée dans le volume de 1903, p. 46; résolue dans celui de 1905, p. 186).

M. J. Joffroy. — *Propriétés de deux progressions.* — M. Barisien a donné dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, en 1914, une question relative aux deux progressions

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad \ldots,$$
$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots.$$

M. Haton de la Goupillière l'a généralisée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Il doit m'être permis de rappeler que j'ai publié dans les *Nouvelles Annales*, en 1889 (p. 85), un article qui prouve que les résultats indiqués ne sont pas nouveaux, et que celui de M. Barisien était déjà connu en 1883, et sans doute bien antérieurement.

Voici l'énoncé du théorème que j'ai publié (*loc. cit.*, p. 86) :

Soient

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad \ldots,\quad k,\quad l,\quad (l+\mathrm{R}),\quad \ldots$$

une progression arithmétique à termes continus, et

$$a,\quad c,\quad e,\quad g,\quad \ldots,\quad k,\quad (l+\mathrm{R}),\quad \ldots$$

la progression formée par les termes de rang impair de l'autre; je décompose la seconde en groupes de a, b, c, ..., l, $l+\mathrm{R}$ *termes; la somme des termes du premier groupe vaut le cube de* a, *la somme des termes du deuxième groupe vaut le cube de* b, ..., *la somme des termes du* $(n+1)^{\text{ième}}$ *groupe vaut le cube de* $(l+\mathrm{R})$, *à la seule condition que le terme* a *soit l'unité, ou à la seule condition que* $\mathrm{R}=a$.

NÉCROLOGIE.

Jules Molk. — Né à Strasbourg le 8 décembre 1857, décédé à Nancy le 7 mai 1914. Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Connu surtout comme directeur de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, à laquelle il apporta une importante contribution personnelle, il avait en outre publié de nombreux travaux, principalement sur des problèmes d'Analyse. Il a été, avec M. H. Vogt, fondateur, à Nancy, de l'Institut de Mécanique appliquée.

Une Notice sur la vie et l'œuvre de Jules Molk a été publiée par l'Université de Nancy.

A. de Saint Germain. — Né le 17 mai 1839, décédé à Paris le 1er septembre 1914. Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Caen. Il était président de la Délégation française à la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, où il donna d'abondantes preuves de son activité et de son esprit d'organisation, et où il était entouré d'une sympathie respectueuse, unanime et bien méritée. Auteur de nombreux et remarquables travaux, principalement sur la Mécanique. Son beau livre, *Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle*, a eu deux éditions (1877, 1899) et a rendu à l'enseignement les plus grands services.

G.-B. Guccia. — Né à Palerme le 21 octobre 1855, décédé à Palerme le 29 octobre 1914. Professeur à l'Université de Palerme. Auteur de nombreux travaux.

très remarqués, notamment sur les courbes et les surfaces algébriques. Mais son plus beau titre à la reconnaissance des mathématiciens est la fondation du *Cercle mathématique de Palerme*, universellement connu aujourd'hui, dont les *Rendiconti*, qui ont commencé à paraître en 1885, ont largement contribué à l'extension de la Science mathématique dans le monde entier.

Une Notice nécrologique sur G.-B. Guccia, fort consciencieuse et très intéressante, vient d'être publiée par M. de Franchis dans les *Rendiconti* (t. XXXIX, janvier-février 1915).

F. Cherbuliez. — Décédé le 21 novembre 1914, à l'âge de 78 ans, Privat-Docent à l'École Polytechnique fédérale de Zurich.

A. Venturi. — Né à Florence le 22 septembre 1852, décédé à Palerme le 29 décembre 1914. Il professait la Géodésie et la Mécanique à l'Université de Palerme, dont il avait été directeur (1899-1903).

N. Sonin. — Né le 22 février 1849, à Tula, décédé le 27 février 1915 à Petrograd. Membre de l'Académie impériale des Sciences de Petrograd, il était président du Comité scientifique attaché au Ministère de l'Instruction publique de Russie. Il faisait partie de la Commission internationale de l'enseignement mathématique. On lui doit de nombreux travaux.

G. Pirondini. — Né à Modène le 3 octobre 1857, décédé à Rome. Professeur à l'Institut technique. Il fut l'auteur de travaux mathématiques importants, notamment en Géométrie infinitésimale.

CERTIFICATS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Expliquer comment on détermine une transformation de contact dans l'espace à trois dimensions sachant qu'entre les coordonnées ponctuelles de deux éléments correspondants n'existe qu'une relation qu'on suppose connue. Donner un exemple.*

II. *On considère une équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

1° *Quelle est la forme la plus générale de cette équation quand les développables caractéristiques sont des cônes ayant leur sommet sur* Ox.

2° *On désigne par* M *un point d'une surface intégrale, par* A *le point où le plan tangent en* M *coupe* Ox *et par* MT *la tangente en* M *à la courbe caractéristique qui passe par ce point sur la surface considérée.*

Quelle est la forme la plus générale de l'équation (1) *pour que* MA *et* MT *soient rectangulaires pour tout point* M *de toute surface intégrale.*

3° *Trouver la forme la plus générale de l'équation* (1) *pour que les deux conditions précédentes* (1° *et* 2°) *soient simultanément vérifiées et montrer que dans ce cas les courbes caractéristiques sont des lignes de courbure pour les surfaces intégrales.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver les caractéristiques de l'équation*

$$2z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - 3 p_3 x_3 - 2 x_1^2 p_3^2 = 0$$

et déterminer l'intégrale de cette équation qui, pour $x = 1$,

se réduit à

$$z = -\frac{1}{4}x_3^2.$$

(Juin 1913.)

Épreuve théorique. — I. *Établir le théorème d'existence des intégrales d'un système Jacobien d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes à une fonction inconnue, le nombre des équations étant inférieur au nombre des variables (systèmes complets). Forme de l'intégrale générale.*

II. *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$z = f(x_1, p_1) + \varphi(x_2, p_2) + \psi(x_3, p_3),$$

où f, φ, ψ sont trois fonctions données et z une fonction inconnue de x_1, x_2, x_3, montrer que la recherche d'une intégrale complète de cette équation se ramène à l'intégration de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre. Application à

$$z = p_1 x_1 + p_1^2 + 1 + p_2 \operatorname{tang} x_2 + \frac{1}{2} p_3 x_3 + \frac{2x_3}{p_3}.$$

Épreuve pratique. — *On considère une transformation de contact dans l'espace, telle que les coordonnées (x, y, z) et (X, Y, Z) de deux points correspondants quelconques soient liées par la relation*

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = z^2$$

et que, réciproquement, deux points liés par cette relation puissent être considérés comme se correspondant dans la transformation pour un choix convenable de p, q, P, Q.

Déduire de là les expressions de X, Y, Z, P, Q en fonctions de x, y, z, p, q.

Soit S la transformée d'une surface s parcourue par le point (x, y, z) et soit M un point de S correspondant à un point m de s. Quelle relation existe-t-il entre les angles Ω et ω que font les plans tangents en M à S et en m à s avec le plan des x, y. Quelle sera la surface S si s se réduit à une droite; même question si s se réduit à un cercle dont le plan est parallèle au plan des x, y?

(Novembre 1913.)

Grenoble.

Composition. — *Étant donnée l'équation*

$$(1) \qquad \beta y x^2 p - \alpha x y^2 q = z(\beta y^2 - \alpha x^2) :$$

1° *Trouver l'intégrale générale de cette équation;*

2° *Trouver une surface intégrale qui admette les caractéristiques pour l'un de ses systèmes de lignes asymptotiques, et déterminer l'autre système de ces lignes;*

3° *Trouver une surface intégrale qui passe par la courbe*

$$x^2 - y^2 = a^2, \qquad z = b.$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$(y^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = y[ny'^2 + (n+1)y^2 + yy''].$$

(Juillet 1913.)

Marseille.

Composition écrite (Durée : quatre heures). — *Une surface* S *étant rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, et* p *et* q *étant les dérivées partielles de* z *par rapport à* x *et à* y, *on mène en un point* M *de coordonnées* x, y, z *le plan tangent et la normale à la surface. L'axe des* z *est rencontré par le plan tangent et la normale en un point* Q.

1° *Déterminer les distances* OP *et* OQ *de l'origine* O *aux points* P *et* Q.

2° *En posant*

$$\mathrm{OP} = -u, \qquad p^2 + q^2 = \rho^2, \qquad \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{p} = \omega,$$

déterminer la distance OQ *en fonction des variables* u, ρ *et* ω.

3° *Déterminer les surfaces pour lesquelles les points* P *et* Q *sont symétriques par rapport à l'origine* O *en exprimant dans ce cas* x, y *et* z *en fonction de* ρ *et de* ω.

SOLUTION.

On a

$$OP = z - px - qy = -u,$$

$$Z = OQ = \frac{1}{p^2+q^2}[px + qy + (p^2+q^2)z].$$

On a ensuite

$$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \qquad y = \frac{\partial u}{\partial q}, \qquad z = p\frac{\partial u}{\partial p} + q\frac{\partial u}{\partial q} - u,$$

$$p\,dp + q\,dq = \rho\,d\rho,$$

$$p\,dq - q\,dp = \rho^2\,d\omega,$$

d'où l'on tire

$$p\frac{\partial u}{\partial p} + q\frac{\partial u}{\partial q} = \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Mais on a

$$(p^2+q^2)Z = px + qy + (p^2+q^2)z,$$

on a donc pour $Z - u = 0$

$$(p^2+q^2+1)\left(p\frac{\partial u}{\partial p} + q\frac{\partial u}{\partial q}\right) = 2(p^2+q^2)u$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(1+\rho^2) = 2\rho u.$$

En intégrant, on a, avec une fonction f arbitraire,

$$u = (1+\rho^2)f(\omega).$$

En portant les valeurs de u, p et q dans x, y et z, il vient enfin

$$x = 2\rho^2 f(\omega)\cos\omega - \frac{1+\rho^2}{\rho}f'(\omega)\sin\omega,$$

$$y = 2\rho^2 f(\omega)\sin\omega + \frac{1+\rho^2}{\rho}f'(\omega)\cos\omega,$$

$$z = (\rho^2-1)f(\omega).$$

ÉPREUVE PRATIQUE (Durée : deux heures). — 1° *Vérifier que l'équation différentielle*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} = 4y = 18xe^{2x}$$

admet une intégrale de la forme

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + mx + n)e^{2x}$$

renfermant deux constantes arbitraires m et n;

2° *Calculer l'intégrale générale;*

3° *Déterminer les constantes de l'intégrale générale de sorte qu'elle devienne par rapport à x un infiniment petit d'ordre supérieur au second;*

4° *Vérifier qu'on obtient alors un infiniment petit du quatrième ordre et calculer sa partie principale.*

SOLUTION.

On trouve

$$y = e^{2x}(x^3 - x^2 + \alpha x + \beta) + Ce^{-x}.$$

En posant $\beta = -\frac{2}{9}$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $C = \frac{2}{9}$, on a $y = \frac{3}{4}x_4 + \ldots$.

(Novembre 1913.)

COMPOSITION ÉCRITE. — *Déterminer les développantes et les développées de la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques*

$$x = \frac{\sqrt{2\sin^2 t}}{\cos t} - \sqrt{2}(1 - \cos t),$$

$$y = \frac{\sin^3 t}{\cos t} - \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

$$z = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

SOLUTION.

On trouve sans difficulté les 9 cosinus du trièdre mobile, les rayons de courbure qui sont égaux au signe près, l'arc, les développantes et les développées par des équations paramétriques où tout est intégré. La courbe est une hélice tracée sur un cylindre transcendant.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étudier la variation de la fonction $u = \cos z$ lorsque le point z décrit l'axe des y dans le plan des z. Soit z_0 un point pris sur cet axe, et soit v_0*

la valeur correspondante choisie dans les significations de $v_0 = \log\cos z_0$, *développer la fonction* $v = \log\cos z$ *qui prend la valeur* v_0 *pour* $z = z_0$. *Calculer les premiers termes et fixer le cercle de convergence de cette série.*

On admettra que $\cos z$ *n'a pas d'autres zéros que* $\cos x$ *réel.*

SOLUTION.

$$v = \log\operatorname{sh} y_0 - \frac{\operatorname{sh} y_0}{\operatorname{ch} y_0}(z - z_0) - \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 y_0}(z - z_0)^2 + \ldots;$$

$$R^2 = y_0^2 + \frac{\pi^2}{4}.$$

(Juin 1914.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Exposer la méthode Mayer pour l'intégration des systèmes Jacobiens.*

II. *On considère une famille de surfaces dépendant de trois paramètres* a, b, c *indépendants*

$$V(x, y, z, a, b, c) = 0$$

et l'on suppose que les trois équations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

peuvent être résolues par rapport à a, b, c *en fonction de* x, y, z, p, q. *Soient*

$$a = \varphi_1(xyzpq), \qquad b = \varphi_2(xyzpq), \qquad c = \varphi_3(xyzpq),$$

les formules de résolution. Que peut-on dire des trois crochets

$$[\varphi_1, \varphi_2], \quad [\varphi_2, \varphi_3], \quad [\varphi_3, \varphi_1]?$$

Quelles sont les solutions communes aux trois équations

$$[\varphi_1, f] = 0, \qquad [\varphi_2, f] = 0, \qquad [\varphi_3, f] = 0\,?$$

Peut-on obtenir facilement une intégrale complète de l'équation

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0,$$

où F *est une fonction donnée des trois fonctions* φ_1, φ_2, φ_3 ?

Épreuve pratique. — *Trouver une intégrale complète du système d'équations simultanées suivant :*

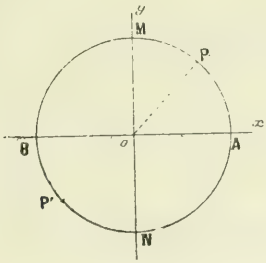
$$2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + x_3 x_4,$$
$$p_3 = x_4,$$
$$p_4 = x_3.$$

On rappellera d'abord la méthode générale à suivre sans aucune démonstration et on l'appliquera à cet exemple. (Juin 1912.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *On considère deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et un cercle de centre* O *et de rayon* R.

Former une fonction $f(z)$ *holomorphe à l'intérieur de*



ce cercle et qui prenne sur le contour les valeurs définies par les conditions suivantes :

1° *En tout point* P *de l'arc* AMB :

$$f(z) = \textit{longueur de l'arc } \overline{AP};$$

2° *En tout point* P′ *de l'arc* ANB :

$$f(z) = \textit{longueur de l'arc } \overline{\mathrm{AP'}}.$$

(*Ces longueurs étant positives essentiellement et inférieures à la demi-circonférence.*)

Former le développement en série de Taylor de cette fonction dans le voisinage de l'origine et vérifier que cette série admet le cercle donné comme cercle de convergence.

En posant

$$\mathrm{F}(z) = -\frac{\pi}{2\mathrm{R}} f(z),$$

montrer que la fonction $\mathrm{F}(z)$ *vérifie l'équation différentielle*

$$z\frac{d^2\mathrm{F}}{dz^2} + \frac{d\mathrm{F}}{dz} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 - z^2}.$$

En intégrant cette équation, montrer que la valeur de $\mathrm{F}(z)$ *peut s'exprimer au moyen d'une intégrale curviligne prise le long d'un chemin allant du point* O *au point* z *et d'un terme constant.*

Sous cette dernière forme, montrer que le domaine d'existence de $\mathrm{F}(z)$, *c'est-à-dire aussi de* $f(z)$, *s'étend au delà du cercle donné. Quels sont les points singuliers de la fonction* $\mathrm{F}(z)$?

Quel est le domaine d'existence de cette fonction ?

Quelles coupures faut-il tracer dans le plan pour rendre la fonction $\mathrm{F}(z)$ *holomorphe dans tout son domaine d'existence, de manière que ce domaine renferme tous les points à l'intérieur du cercle donné.*

Épreuve pratique. — 1° *Soit* A *le point du plan qui est représenté par l'affixe* $1 + i$. *Calculer les différentes valeurs de l'intégrale* $\int_{\mathrm{AO}} \frac{dz}{z^4 - 1}$ *suivant la nature du chemin* OA.

Mettre en évidence les périodes.

2° *Calculer*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log(1 + x)}{(1 + x^2)^3}\, dx.$$

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *On considère deux cercles* C *et* C′ *concentriques ayant respectivement pour rayon* R *et* r. *Former une fonction* $f(x)$ *holomorphe dans la couronne circulaire et prenant pour valeur, en chaque point* M *du contour* CC′, *la valeur de la distance* MH *de ce point à un axe fixe* Ox *passant par le centre des cercles.*

Former le développement de cette fonction $f(x)$ *en série de Laurent et vérifier qu'elle satisfait à l'équation différentielle*

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - f = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{R x^2}{R^2 - x^2} + \frac{r x^2}{x^2 - r^2} - (R + r) \right\}.$$

Intégrer cette équation : on en déduira le domaine d'existence de la fonction $f(x)$. *Quelles coupures faut-il tracer pour que cette fonction soit holomorphe dans tout son domaine d'existence ?*

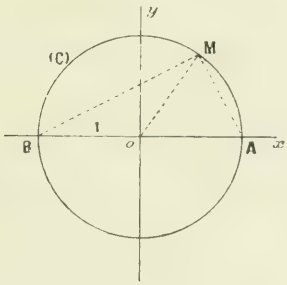
Épreuve pratique. — *Calculer, par la méthode des résidus, l'intégrale définie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^4)^2} \, dx.$$

(Novembre 1912.)

Épreuve théorique. — *On considère un cercle* (C) *de centre* O *et de rayon égal à l'unité.*

Soient A *et* B *deux points diamétralement opposés sur la circonférence; une fonction* $f(z)$ *est holomorphe dans*



le cercle et sur le contour lui-même, et a pour valeur sur

ce contour en un point M *l'expression*

$$f(\mathrm{M}) = \frac{5.\overline{\mathrm{MB}} - 3.i.\overline{\mathrm{MA}}}{3.\overline{\mathrm{MB}} - 5.i.\overline{\mathrm{MA}}},$$

où MA *et* MB *représentent les longueurs ordinaires avec la convention suivante pour les signes :* $\overline{\mathrm{MA}}$ *est toujours positif;* $\overline{\mathrm{MB}}$ *est positif si* M *est au-dessus de* AB *et négatif si* M *est au-dessous.*

On demande :

1° *Former le développement en série de Mac-Laurin de la fonction* $f(z)$ *pour un point* x *quelconque à l'intérieur du cercle* (C); *convergence de la série, cercle de convergence.*

2° *Trouver la somme de la série et en déduire l'expression générale de* $f(z)$; *vérifier que cette fonction satisfait bien aux conditions de l'énoncé. Points singuliers et domaine d'existence de cette fonction.*

Épreuve pratique. — I. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$$

en prenant pour détermination du radical celle qui se réduit à $+1$ *pour* $x = 0$.

II. *Exprimer, au moyen des fonctions elliptiques d'un paramètre les coordonnées de la courbe*

$$y^3 = x^2(x-1)^2.$$

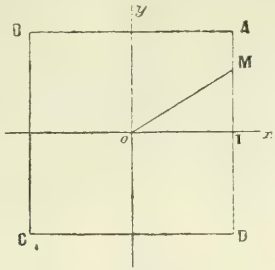
(Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — *On considère le carré* ABCD *dont les côtés ont pour équation* $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Soit $f(z)$ *une fonction qui, en chaque point* M *du contour* ABCD, *a pour valeur le sinus de l'un des deux angles (compris entre* O *et* π) *que fait* OM *avec le côté du carré où se trouve* M.

Il est facile de voir que cette fonction est continue sur le contour, mais non analytique. Elle permet donc de

définir, au moyen d'une intégrale de Cauchy, une fonction $F(x)$ *holomorphe à l'intérieur du carré.*



Étudier sommairement cette fonction.

Développer cette fonction en série de Taylor dans le voisinage de l'origine. Étudier le cercle de convergence de cette série et en déduire quelques points singuliers de $F(x)$.

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'intégrale*

$$y = \int \frac{(x-2)\,dx}{(x-1)\sqrt{x^3-1}},$$

on demande d'exprimer x *et* y *au moyen de transcendantes elliptiques* p, z, σ *d'une variable auxiliaire* u.

(Novembre 1913.)

Lille.

Première question. — *Théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre.*

Deuxième question. — *Étudier la courbe représentée en coordonnées polaires par les équations*

$$r = \frac{1}{\sqrt{pu - e_2}}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{pu - e_1}}{\sqrt{pu - e_3}},$$

p *étant la fonction elliptique d'invariants* 1 *et* 0. *Rectification de la courbe. Calcul des périodes; interprétation géométrique.* (Juillet 1912.)

Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, *former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la sphère circonscrite au tétraèdre formé par les trois plans* yOx, zOx, xOy *et le plan tangent en un point quelconque de la surface ait un rayon constant.*

Trouver une intégrale complète de cette équation.

Trouver l'équation de l'intégrale singulière. Interprétation géométrique.

On pourra effectuer dans l'équation aux dérivées partielles la transformation de Legendre.

(Novembre 1912.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *On considère la cubique représentée par l'équation*

$$x^3 - 3\sqrt[3]{4}xy^2 - 4y^3 - 4y^2 - 2y = 0.$$

1° *Construire la courbe.*

2° *Exprimer les coordonnées* x, y *d'un point* M *de la cubique en fonction d'un paramètre* u, *à l'aide d'une certaine fonction* $\wp u$ *de Weierstrass et de sa dérivée* $\wp' u$. *La représentation paramétrique est-elle parfaite?*

3° *Quelles valeurs suffit-il de donner à* u *pour obtenir les points réels de la courbe? Suivre sur la cubique la marche du point* M *quand* u *prend ces valeurs.*

4° *Former la relation qui lie les paramètres de trois points de la courbe situés en ligne droite. Montrer que par un point pris sur la cubique on peut en général lui mener quatre tangentes réelles ou imaginaires distinctes de la tangente au point considéré; étudier leur réalité; calculer le rapport anharmonique de ces quatre tangentes.*

Épreuve pratique. — 1° *Montrer que la fonction*

$$z = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma v} e^{-u\zeta v}$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} - uz.\wp v = 0.$$

En déduire le développement en série entière en u de z considéré comme fonction de u. On calculera ses douze premiers coefficients en fonction de g_2, g_3, $\wp v$, $\wp' v$.

2° *Trouver les développements en séries entières en u des trois fonctions* $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, *et calculer leurs premiers coefficients en fonction de* g_2, g_3, e_1, e_2, e_3.

3° *Dire comment on obtient le développement en série entière en u de la fonction* σu, *sachant qu'on a*

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \ldots + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \ldots,$$

où les coefficients c sont supposés connus. Calculer les premiers coefficients de ce développement.

(Juin 1913.)

I. *On donne l'équation*

$$8u^2(u-z)^2 - (z-1)^2 z^3 = 0$$

qui définit u comme fonction algébrique de z.

1° *Trouver les points singuliers de la fonction u.*

2° *Trouver la forme des développements des branches de u dans le domaine de chacun de ces points.*

3° *Expliquer comment on construit la surface de Riemann corrélative de l'équation donnée.*

II. *On donne l'équation*

$$u^2 + 2pu + q = 0, \tag{1}$$

où p désigne une constante non nulle et q une fonction entière de z.

1° *Former l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre* E *à laquelle satisfont les branches de la fonction u de z définie par l'équation* (1).

2° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de l'équation* E? *Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux et comparer ces points aux points singuliers de la fonction u.*

3° *Intégrer l'équation* E *directement et retrouver, par là, les racines de l'équation* (1). (Juin 1912.)

I. *Genre d'une relation algébrique de la forme*

$$u^2 = A(z - e_1)(z - e_2)\ldots(z - e_n),$$

les constantes e étant distinctes.

II. *On donne l'équation différentielle linéaire homogène*

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\cos z}{z}\frac{du}{dz} + \frac{\sin z}{z^2} u = 0.$$

Trouver les deux intégrales régulières linéairement indépendantes u_1 et u_2, de la forme la plus simple, qu'elle admet dans le domaine indéfini de l'origine $z = 0$. On calculera les quatre premiers termes de la série qui représente la plus simple u_1 des deux; puis, on calculera les trois premiers termes de la suite qui exprime $\frac{u_2}{u_1}$.

(Juin 1913.)

I. *On considère la fonction algébrique u de z définie par l'équation irréductible $F(z, u) = 0$, dont le premier membre est un polynome entier en z et u, de degré m par rapport à u. Soient $z = z_0$, $z = a$ deux points ordinaires de u, u_0 une quelconque des m racines de $F(z_0, u) = 0$ et $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_m$ les m racines de $F(a, u) = 0$.*

Démontrer qu'il existe toujours des chemins tels que la branche de u qui, en z_0, a la valeur u_0, acquière en a une quelconque des valeurs $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_m$ assignée d'avance lorsque z va de z_0 en a en suivant l'un de ces chemins.

II. *On donne l'équation différentielle linéaire homogène*

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p\frac{du}{dz} + qu = 0,$$

où p et q sont des fonctions de z uniformes et périodiques, de période ω, et dont l'intégrale générale est supposée uniforme.

1° *Soient $u_1(z)$, $u_2(z)$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales. De quelles formes sont les expres-*

sions de $u_1(z+\omega)$, $u_2(z+\omega)$ *en fonctions de* $u_1(z)$ *et* $u_2(z)$?

2° *Montrer qu'il existe un système fondamental d'intégrales dont les éléments se comportent simplement quand* z *passe du point* z *au point* $z+\omega$.

3° *En déduire leurs formes analytiques.*

(Octobre 1913.)

Paris.

I. *On sait que M. Darboux a donné une méthode générale d'approximation pour les fonctions de grands nombres, et l'a appliquée, en particulier, aux expressions de la forme*

$$\int_a^b f(x)[\varphi(x)]^m\,dx.$$

En supposant comme la méthode générale de M. Darboux, dont on donnera seulement l'énoncé, exposer cette application particulière sur l'exemple suivant :

$$\int_0^1 f(x)[1-x^2]^n\,dx.$$

II. 1° *Trouver le polynome* $P_m(x)$ *de degré* m, *tel qu'on ait*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

2° *Quelle est la fonction de* x, *dont le développement en fonction continue algébrique conduit aux polynomes* P_m *pour les dénominales des réduites successives?*

III. *Soit un système orthogonal*

$$(1) \qquad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x),\quad \ldots,$$

pour un intervalle (a, b), *c'est-à-dire tel que*

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

et

$$\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx = 1.$$

Démontrer que si ce système est fermé, *il est nécessairement* complet, *c'est-à-dire qu'on a*

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots,$$

$f(x)$ étant une fonction sommable et de carré sommable, et les a_n représentant les coefficients de Fourier de cette fonction relatifs au système (1).

N. B. — *On pourra s'appuyer, pour la démonstration, sur le théorème de Riesz donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de constantes données représente les coefficients de Fourier d'une fonction sommable.*

Épreuve pratique. — *Étant donné un système d'axes rectangulaires* (Ox, Oy, Oz), *on considère, sur la sphère de rayon* un *ayant l'origine pour centre, la fonction égale à* $+1$ *au-dessus du plan des xy et égale à* -1 *au-dessous de ce plan. Trouver son développement en fonctions* Y_n *de Laplace, ces fonctions étant formées avec les angles classiques* θ *et* ψ *relatifs au système d'axes donné.*

(Juillet 1912.)

Composition écrite. — I. *Trouver la limite de l'intégrale*

$$\int_{-h}^{-1} \frac{\sqrt{n}\, e^{n(z+1)}}{\sqrt{z^2-1}} f(z)\,dz, \qquad h > 1$$

quand n augmente indéfiniment en étant positif, $f(z)$ étant une fonction continue de z de $-h$ à -1.

II. 1° *On peut mettre x^n sous la forme*

$$x^n = a_n P_n + a_{n-1} P_{n-1} + \ldots + a_p P_p + \ldots + a_0 P_0,$$

les a étant des constantes et les P *des polynomes de Legendre formés avec la variable x.*

Trouver d'une manière générale la valeur a_p. L'expression trouvée ne devra pas contenir de signe d'intégrale définie.

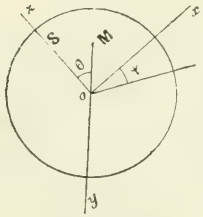
2° *Vérifier le résultat obtenu en calculant les coefficients*

de $\frac{1}{y^{n+1}}$ *dans les développements suivant les puissances de* $\frac{1}{y}$ *des deux membres de l'égalité classique*

$$\frac{1}{y-x} = \Sigma(2n+1)P_n(x)Q_n(y),$$

où $Q_n(y)$ *est la fonction de Legendre de seconde espèce.*

Épreuve pratique. — *On considère une surface sphérique*



de rayon un, *ayant l'origine pour centre dont les points* M *sont déterminés par les deux angles habituels* θ *et* ψ.

Qu'entend-on par intégrale de Poisson relative à une sphère et à une fonction donnée $f(\theta, \psi)$ *de* θ *et* ψ ?

Indiquer (sans donner de démonstration) la valeur vers laquelle tend l'intégrale de Poisson quand le point A, *dont cette intégrale est fonction, tend vers le point* S *de coordonnées* $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, *en suivant l'axe* Oz *et en étant à l'intérieur de la sphère. Faire le calcul de cette valeur limite quand*

$$f(\theta, \psi) = \cos\theta \cot\frac{1}{2}(\psi - a),$$

a étant la constante complexe $p + qi$.

(Octobre 1912.)

I. *a et b étant deux constantes positives* ($a < b$), *on fait entre les variables* Z *et* z *la transformation*

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(b^2 - z^2)}},$$

la valeur du radical pour $z = 0$ étant prise avec le signe $+$, et la variable z restant dans le demi-plan supérieur situé au-dessus de l'axe des quantités réelles.

On demande quelle est dans le plan Z la figure correspondante à ce demi-plan (on évite naturellement les points $\pm a$, $\pm b$ par de petites courbes situées dans le demi-plan considéré).

II. *Soit* $R(x, y)$ *une fonction rationnelle réelle de deux variables réelles x et y, satisfaisant à l'équation de Laplace*

$$\Delta R = 0.$$

Quelle est la nature de la fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$, qui a $R(x, y)$ *pour partie réelle?*

III. *On considère une aire limitée par un contour simple* C *régulièrement analytique.*

1° *Soit* $R(z)$ *une fonction rationnelle de z, n'ayant pas de pôle sur* C. *Montrer qu'il existe une fonction* $F(z)$ *méromorphe dans l'aire, devenant infinie comme* $R(z)$ *et prenant sur* C *des valeurs réelles.*

$F(z)$ *et* $F_1(z)$ *étant deux telles fonctions correspondant respectivement à* $R(z)$ *et* $R_1(z)$, *démontrer qu'il existe entre elles une relation algébrique*

$$f(F, F_1) = 0.$$

2° *Dans le cas particulier où*

$$R(z) = \frac{1}{z - a}, \qquad R_1(z) = \frac{i}{z - a}$$

(a correspond à un point situé dans l'aire et i est le symbole habituel des imaginaires), former explicitement cette relation algébrique et dire quelle courbe représente l'équation $f = 0$.

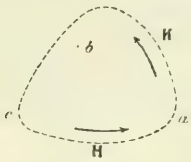
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient la courbe entre u et v*

$$v^2 = (u - a)(u - b)(u - c)$$

(a, b, c étant trois constantes) et l'intégrale

$$(1) \qquad \int \frac{du}{v}.$$

On prend pour $u = u_0$ une des déterminations de v



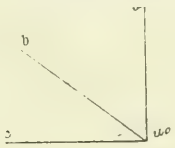
(soit $v = v_0$), on trace les lacets (fig. 1)

$$u_0 a, \quad u_0 b, \quad u_0 c$$

et l'on considère les expressions

$$\omega = A - B, \qquad \omega' = A - C,$$

A, B, C *désignant les valeurs de l'intégrale* (1) *prises respec-*



tivement de u_0 à a, b, c avec la détermination initiale pour le radical.

ω et ω' sont des fonctions de abc. Quelles modifications éprouvent-elles, quand b restant fixe, c et a se permutent de la manière indiquée par la figure 2, c allant en a par le chemin $\widehat{cHa}$ et a allant en c par le chemin $\widehat{aKc}$.

(Juillet 1913.)

I. *Soit* U(x, y) *une fonction harmonique uniforme dans une aire simple* A *limitée par une courbe* C. *Elle est, de plus, régulière dans cette aire, sauf peut-être en un point* O *dans le voisinage duquel on sait seulement qu'on a l'iné-*

galité

$$|U(x, y)| < M,$$

M *étant une constante fixe.*

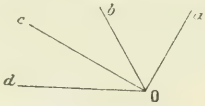
Peut-on affirmer que la fonction $U(x, y)$ *coïncide avec une fonction harmonique uniforme et* partout *régulière dans* A ?

Nota. — *On pourra dans l'étude de cette question faire intervenir directement la fonction harmonique* $V(x, y)$ *associée à* $U(x, y)$.

II. *On considère l'intégrale elliptique*

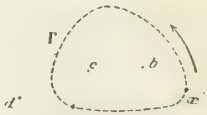
$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

et l'on joint un point O *du plan aux points* a, b, c, d *comme l'indique la figure. En désignant par* A, B, C, D



les valeurs de l'intégrale prises le long des chemins correspondants, la valeur initiale du radical en O *étant la même, on sait qu'on a les deux périodes*

$$\omega_1 = 2A - 2B, \qquad \omega_2 = 2A - 2C.$$

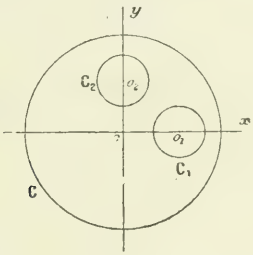


1° *Montrer que le rapport* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *ne peut être un nombre réel.*

2° *On remplace a par la lettre x; ω_1 et ω_2 deviennent alors des fonctions de x. On demande ce que deviennent ω_1 et ω_2 quand x partant de sa position initiale y revient après avoir décrit le chemin* T *qui entoure b et c.*

Épreuve pratique. — *On sait que la figure formée par un cercle* C *et des cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ situés à son intérieur et ne se coupant pas, on peut faire correspondre un groupe* Kleinéen (*au sens de Poincaré*).

On considère en particulier un cercle C *ayant l'origine*



pour centre et un rayon égal à 2 *et deux cercles égaux* C_1 *et* C_2 *ayant respectivement leurs centres* O_1 *et* O_2 *sur* Ox *et* Oy *à une distance* 1 *de l'origine* $(\overline{OO_1} = \overline{OO_2} = 1)$. *On désigne, de plus, par a le rayon de ces cercles* $\left(\text{avec la condition } a < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pour que les cercles ne se coupent pas}\right)$.

Quelles sont, relativement à la variable $z = x + iy$, les substitutions fondamentales du groupe Kleinéen correspondant à cette figure? (Octobre 1913.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1491.

(1884, p. 351.)

Trouver le lieu géométrique des points d'où l'on voit sous le même angle deux segments donnés de deux droites fixes.

Cas où les deux droites sont rectangulaires.

E. FAUQUEMBERGUE.

SOLUTION.

Par M. H. BROCARD.

Ce problème a été étudié et résolu par J. Steiner (*J. de Crelle*, 1852) comme l'a rappelé G. de Longchamps dans la solution qu'il a donnée (*J. de Math. spéc.*, 1886, p. 39-42) au titre de *Questions d'examens*, et *J. de Math. élém.*, 1886, p. 16-18, avec allusion à la question 1491 des *Nouv. Ann. de Math.*, ci-dessus énoncée.

Il suffira donc de résumer ces deux articles.

Soient OABy, OCDx les deux axes de coordonnées formant l'angle $yOx = \theta$.

Désignons OC, OD, OA, OB par α, α', β, β'.

On trouvera assez rapidement l'équation suivante de la courbe, lieu des points I pour lesquels angle AIB = angle CID :

$$\frac{(\alpha-\alpha')y}{(\beta-\beta')x} = \frac{x^2+y^2+2xy\cos\theta-(\alpha+\alpha')(x+y\cos\theta)+\alpha\alpha'}{x^2+y^2+2xy\cos\theta-(\beta+\beta')(y+x\cos\theta)+\beta\beta'}.$$

(Ici une discussion, que j'omets, de signes à choisir.)

Le lieu se compose de deux cubiques circulaires, ayant, en outre des deux ombilics du plan, sept autres points communs : A, B, C, D, O et les deux points d'intersection des circonférences décrites sur AB et CD pour diamètres (J. Steiner).

On en déduit plusieurs cas particuliers :

1° Celui des segments AB et CD sur une même droite δ. Les cubiques dégénèrent en deux cercles et en la droite δ (J. Steiner);

2° Celui des segments AB et CD à angle droit. On fera donc $\cos\theta = 0$ dans l'équation ci-dessus;

3° Les deux segments ont une extrémité commune (en O). Le lieu devient une strophoïde oblique, ayant O pour point double et tangente en ce point aux deux bissectrices de l'angle θ (P.-H. Schoute, *J. de Crelle*, 1885, p. 98-109).

Si $\theta = 90°$, cette courbe se changera en strophoïde droite

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{x^2 + y^2 - \alpha x}{x^2 + y^2 - \beta y}.$$

Note. — D'autres noms pourraient être cités à l'occasion du même problème, G. Salmon, M. Chasles, H. Faure, O. Hermes, K. Kupper, C. Pelz, H. Schröter.

Je remarquerai seulement que, par hasard, les pages 351-352 du présent journal, où se trouve posée la question **1491**, sont suivies d'un article de M. E. Habich, *Sur un système particulier de coordonnées curvilignes*, p. 353-367, où est exposée une méthode de résolution de cette question considérée dans ses relations manifestes avec le problème de Pothenot ou de la Carte.

M. E. Habich a pareillement fait allusion à une extension à l'espace et à la Navigation aérienne, si développée depuis, mais il semble qu'on ne puisse guère éviter une très grande complication et il me suffira d'y renvoyer le lecteur.

1630.

(1892, p. 15[*].)

Dans tout triangle, dont les côtés sont en progression géométrique, il y a égalité entre le cercle circonscrit et le cercle osculant la potentielle au centre de gravité.

E. Cesaro.

SOLUTION.

Par M. H. Brocard.

Si la solution s'est un peu fait attendre, c'est certainement à cause d'un petit piège habilement dissimulé dans l'énoncé. En effet, la potentielle triangulaire, lieu de points conjugués

isogonaux, est, en principe, une courbe transcendante, où l'on a quelque embarras à soupçonner une courbure mesurable, mais la possibilité apparaîtra mieux lorsqu'on aura vérifié que pour le triangle particulier, dit *moyen en a*, dont les trois côtés $c = af$, a, $\frac{a}{f} = b$ sont en progression géométrique, d'où $a^2 = bc$, la potentielle cesse d'être transcendante, devient algébrique, et représente l'ellipse de Steiner d'un certain triangle.

La question se simplifie alors dans les termes suivants :

On donne un triangle ABC et une ellipse, tangente en B et C aux côtés AB, AC et passant par le barycentre G. Le rayon de courbure en ce point est le même que celui du cercle circonscrit au triangle, si ledit triangle est moyen en a.

Ainsi transformée, la question **1630** devient facile à traiter par l'analyse.

Prenons pour axes de coordonnées rectangulaires Ay et AGDx.

Soient E, F les projections de B, C sur Ax; AD $= l$, DE $=$ DF $= m$, BE $=$ CF $= d$.

On aura

$$\text{aire S} = l\,d = \frac{abc}{4\text{R}};$$

mais

$$bc = a^2,$$

donc

$$\text{R} = \frac{a^3}{4\,l\,d}.$$

D'autre part, les droites AB, AC, BC ont respectivement pour équations

$$(\text{AB}) \qquad y - \frac{dx}{l+m} = 0, \qquad \gamma,$$

$$(\text{AC}) \qquad y + \frac{dx}{l-m} = 0, \qquad \beta,$$

$$(\text{BC}) \qquad y - \frac{d}{m}(x - l) = 0, \qquad \alpha.$$

L'ellipse tangente en B et C et passant par G, et qui a son

centre O sur AGDx, est représentée par l'équation

$$\beta\gamma + \lambda\alpha^2 = 0,$$

λ étant déterminé par la condition G($x = l$, $y = 0$).

On trouve ainsi l'équation

$$l^2y^2 + 3(my - dx)^2 + 8\,l\,d(my - dx) + 4\,l^2\,d^2 = 0.$$

Pour $y = 0$, on a

$$3x^2 - 8\,l\,x + 4\,l^2 = 0,$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3}\,l, \qquad x_2 = 2\,l,$$

qui représentent le point G, et le point A', quatrième sommet du parallélogramme ABA'C.

Le centre O $\left(x = \frac{4\,l}{3}\right)$ est le barycentre G' du triangle A'BC symétrique du proposé par rapport à D.

Mais la tangente en A' est parallèle à la tangente en G ou à BC; par suite, l'ellipse est inscrite au triangle AB'C' dont les côtés AB' et AC' sont doubles de AB et de AC. C'est donc une ellipse de Steiner, ayant son centre en G', barycentre des triangles A'BC et AB'C'.

C'est, plus simplement, une projection de la configuration du triangle équilatéral et de ses cercles inscrit et circonscrit. On en conclut que l'ellipse passe aussi par les barycentres des triangles BA'B', CA'C'.

Quant à sa dérivation de la potentielle triangulaire, il suffit d'observer que celle-ci a pour équation, en coordonnées normales,

$$(a\alpha)^{\log\frac{b}{c}}(b\beta)^{\log\frac{c}{a}}(c\gamma)^{\log\frac{a}{b}} = 1,$$

qui se réduit lorsque a, b, c vérifient la relation

$$a^{p+q} = b^p c^q,$$

ce qui est le cas pour le triangle moyen en a.

La potentielle est alors une conique tangente aux côtés b et c aux points C et B.

Il reste donc à évaluer la courbure de l'ellipse au point G.

On trouve aisément

$$y'_G = \frac{d}{m},$$

c'est-à-dire la tangente parallèle à BC, et ensuite

$$y''_G = -\frac{l\,d}{2m^2}.$$

Donc, en ce point, le rayon de courbure R_G a pour valeur (au signe près)

$$R_G = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{2(d^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}{l\,d};$$

mais

$$d^2 + m^2 = \frac{a^2}{4}$$

et

$$l\,d = \frac{a^3}{4R},$$

donc

$$R_G = \frac{8a^3R}{4^{\frac{3}{2}}a^3} = R.$$

Note. — Il est juste d'observer qu'une étude de Cesaro, *Sur la potentielle triangulaire*, parue ici, 1888, p. 257-268, contient manifestement le germe de la question 1630 qu'il proposa en 1892.

QUESTIONS.

2241. Démontrer les formules algébriques suivantes entre les distances respectives d_a, d_b, d_c du point φ de Feuerbach d'un triangle ABC aux pieds A', B', C' des hauteurs AA', BB', CC' :

1°

$$\frac{1}{d_a d_b} + \frac{1}{d_b d_c} + \frac{1}{d_a d_c} = \frac{1}{r}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r}\right),$$

r et R désignant les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle;

2°

$$\frac{d_a}{\sin B \sin C(\cos B - \cos C)} = \frac{d_b}{\sin A \sin C(\cos C - \cos A)}$$
$$= \frac{d_c}{\sin A \sin B(\cos A - \cos B)}.$$

V. Thébault.

2242. On donne un tétraèdre ABCD et un point M. La parallèle menée par M à une arête rencontre les faces qui ne contiennent pas cette arête aux points P et Q. Démontrer que la somme des produits $MP \times MQ$ pour les six arêtes égale la puissance de M par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Généralisation d'une propriété connue relative au triangle.

V. Thébault.

2243. Étant données deux droites D et Δ rectangulaires, ne se rencontrant pas, et, dans un plan perpendiculaire à D, un cercle C ayant son centre sur cette droite, on considère la surface réglée du quatrième ordre ayant pour directrices D, Δ et C (bien connue en Stéréotomie comme constituant l'intrados de la voûte dite *arrière-voussure de Montpellier*). Démontrer *géométriquement* que la section de cette surface par tout plan perpendiculaire à D est une *conchoïde de Nicomède*.

M. d'Ocagne.

2244. Étant donné un parallélépipède à base carrée et le cylindre circulaire droit qui lui est circonscrit, on considère le solide que l'on obtient en unissant la base inférieure de l'un à la base supérieure de l'autre au moyen de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur le contour de chacune de ces bases et dont le prolongement rencontre l'axe commun des deux solides donnés. Évaluer le volume du solide ainsi engendré en fonction du côté c de la base du parallélépipède et de sa hauteur h. On calculera le coefficient numérique qui entre dans cette expression à 0,0001 près et l'on se rendra compte de l'erreur relative que l'on commettrait en substituant au volume ainsi obtenu la moyenne des volumes du parallélépipède et du cylindre.

M. d'Ocagne.

2245. On considère : une ellipse E ; l'ellipse E_1 concentrique à E, de mêmes directions d'axes et dont les longueurs d'axes sont le tiers de celles de E ; un point fixe G. Les côtés de tous les triangles inscrits dans E et ayant G pour centre de gravité enveloppent une conique Γ qui sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le point G sera à l'intérieur de E_1, à l'extérieur de E_1, ou situé sur E_1. Dans quel cas Γ sera-t-elle une hyperbole équilatère. E.-N. Barisien.

2246. On fait rouler, intérieurement, un cercle de rayon $\frac{3a}{2}$ sur un cercle de rayon a et l'on demande : l'enveloppe d'un diamètre du cercle mobile, invariablement lié à ce cercle; le lieu des extrémités de ce diamètre. F. Balitrand.

2247. On donne un cercle de centre O et de rayon a; et la cardioïde, conchoïde de ce cercle, par rapport à un point de sa circonférence. On demande l'enveloppe d'un segment de longueur constante, égale à a, dont les extrémités décrivent respectivement la cardioïde précédente, et un cercle concentrique au cercle donné et de rayon double.

F. Balitrand.

2248. On donne la chaînette qui a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

et l'on demande le lieu des foyers des paraboles tangentes à la chaînette et admettant comme directrice commune l'axe des x.

F. Balitrand.

ERRATA.

4e série, t. XIV, 1914. p. 547, ligne 11 en remontant :

Au lieu de 1914, *lire* 1913.

[M¹1c]

POINTS CONJUGUÉS D'ORDRE p D'UN POINT P; POLAIRES SUCCESSIVES;

PAR M. G. FONTENÉ.

HISTORIQUE DE LA QUESTION; OBJET DE CETTE NOTE.

1° La notion du *conjugué harmonique* P′ d'un point P par rapport à un système de points, au moyen de la formule

$$\frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \ldots + \frac{1}{\rho_m},$$

est due à Cotes, qui en a déduit l'existence de la *droite polaire* d'un point par rapport à une courbe algébrique d'ordre m; au moyen des formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho,$$

on obtient l'équation de cette droite sous la forme

$$(X - x)f'_{x_0} + \ldots + mf(x_0, y_0) = 0,$$

et l'on écrit ensuite

$$Xf'_{x_0} + \ldots + Zf'_{z_0} = 0.$$

Maclaurin appelle *moyenne harmonique* des quantités $\rho_1, \ldots, \rho_m$ la quantité ρ définie par l'égalité ci-dessus; Poncelet (*Journal de Crelle*, t. 3) appelle *centre des moyennes harmoniques* le point que nous avons appelé *conjugué harmonique*.

2° La considération de la première polaire, comme courbe donnant les points de contact des tangentes

issues d'un point, est certainement très ancienne; Bobillier, en restant à ce point de vue, a considéré les polaires successives, la $(m-1)^{\text{ième}}$ polaire se trouvant être la droite polaire de Cotes (*Annales de Gergonne*, 1828-1829, p. 302).

3° Grassmann, reprenant l'idée de Cotes, l'a généralisée en écrivant

$$(p) \qquad \sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_{m-p}}\right)=0$$

et aussi (*voir* plus loin)

$$((p)) \qquad \sum\frac{P'P_1}{PP_1}\times\ldots\times\frac{P'P_{m-p}}{PP_{m-p}}=0$$

(*Journal de Crelle*, t. 24, 1842, p. 262). Il donne l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire en prenant le point P comme origine des coordonnées.

4° Salmon (*Courbes planes*, 1852) a formé d'une manière simple l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire au moyen des formules

$$x=x_0+\lambda X, \qquad \ldots, \qquad z=z_0+\lambda Z,$$

en partant de la relation $((p))$.

5° De Jonquières (*Journal de Liouville*, 1857) a considéré les choses au point de vue géométrique.

6° F. Lucas (*Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes*, 1864, Gauthier-Villars éditeur) a très heureusement présenté la relation

$$(1) \qquad \sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_{m-1}}\right)=0,$$

qui définit les conjugués d'ordre 1 d'un point P, *comme relative aux maximums et aux minimums*

du produit

$$\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_m}\right),$$

ou encore du produit

$$\frac{P'P_1\times\ldots\times P'P_m}{\overline{P'P}^m}.$$

Entre autres avantages, cette façon de faire montre immédiatement que les conjugués d'ordre q du point P, par rapport aux conjugués d'ordre p, sont les conjugués d'ordre $p+q$ de ce point par rapport aux points primitifs.

Malheureusement, entraîné sans doute par la forme de la seconde des expressions ci-dessus, au lieu de désigner le produit des binomes $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_i}\right)$ par $F\left(\frac{1}{\rho}\right)$ et d'écrire pour les polaires successives

$$F'\left(\frac{1}{\rho}\right)=0,\qquad F''\left(\frac{1}{\rho}\right)=0,\qquad \ldots,$$

il écrit

$$\Phi(\rho)=\frac{(\rho-\rho_1)\ldots(\rho-\rho_m)}{\rho^m},$$

ce qui complique les choses; il obtient l'équation de la première polaire sous la forme

$$(X-x_0)f'_X+(Y-y_0)f'_Y+mf(X,Y)=0.$$

7° En écrivant $F'\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$, et en employant les formules $x=x_0+\alpha\rho,\ldots$, j'ai obtenu du premier coup, comme Salmon d'ailleurs, l'équation de la première polaire sous sa forme définitive

$$x_0f'_X+\ldots+z_0f'_Z=0;$$

la $p^{\text{ième}}$ polaire correspond à $F^{(p)}_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = 0$, forme condensée de l'équation (p).

Cette méthode, qui utilise directement la relation (p), *me semble préférable à la méthode de Salmon, où l'on se sert d'une relation* $((p))$ *déduite de la relation primitive; elle explique bien la présence des dérivées dans l'équation de la polaire, l'équation* $F^{(p)}_{\left(\frac{1}{\rho}\right)}$ *étant amenée par une question de maximum.* (*Voir* toutefois une observation à la fin du n° 6.)

I.

1. *a.* Soient donnés sur une droite des points P_1, P_2, ..., P_m, en nombre m, et un point P. En désignant par ρ l'abscisse d'un point de la droite, comptée à partir de P, considérons l'équation

$$(0) \qquad F\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m}\right) = 0.$$

qui a pour racines les inverses des abscisses des points P_i en prenant pour inconnue $\frac{1}{\rho}$. Si ρ représente maintenant l'abscisse d'un point P' pris sur la droite, considérons la fonction $F\left(\frac{1}{\rho}\right)$, ou encore la fonction

$$\frac{P'P_1 \times P'P_2 \times \ldots \times P'P_m}{\overline{P'P}^m},$$

qui n'en diffère que par un facteur constant; *les valeurs de* ρ *qui correspondent aux maximums et aux minimums de cette fonction sont données par l'équation*

$$(1) \qquad F'_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \sum\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-1}}\right) = 0;$$

on obtient ainsi des points P′, *en nombre* $m-1$, *qui sont dits* les conjugués d'ordre 1 *du point* P *par rapport aux m points donnés.* Cette expression est due à F. Lucas.

b. Si l'on prend les conjugués d'ordre 1 du point P par rapport aux $m-1$ points P′, on obtient $m-2$ points P″ dont les abscisses ρ vérifient l'équation

$$(2)\quad F''_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-2}}\right) = 0;$$

ces points P″ *sont dits* les conjugués d'ordre 2 *du point* P *par rapport aux m points donnés.*

c. On continue ainsi, et les conjugués d'ordre p du point P correspondent à l'équation

$$(p)\qquad F^{p}_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-p}}\right) = 0,$$

qui est du degré $m-p$.

d. On arrive finalement à l'équation

$$(m-1)\qquad F^{m-1}_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) = 0,$$

qui donne *le conjugué d'ordre* $m-1$, *le conjugué harmonique.*

2. En remplaçant $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}$ par $\frac{\rho_1 - \rho}{\rho\rho_1}$, l'équation (p) peut s'écrire, avec un seul accent au lieu des p accents qui seraient nécessaires,

$$((p))\qquad \sum \frac{P'P_1}{PP_1} \times \frac{P'P_2}{PP_2} \times \cdots \times \frac{P'P_{m-p}}{PP_{m-p}} = 0;$$

on en déduit, en multipliant par $\frac{PP_1}{P'P_1} \times \ldots \times \frac{PP_m}{P'P_m}$,

$$\sum \frac{PP_1}{P'P_1} \times \ldots \times \frac{PP_p}{P'P_p} = 0:$$

de sorte que, *si le point* P′ *est conjugué d'ordre* p *du point* P *par rapport aux points donnés, le point* P *est conjugué d'ordre* $m - p$ *du point* P′ *par rapport à ces mêmes points*. Les $m - p$ points qui sont les conjugués d'ordre p du point P sont les points dont le point P est un conjugué d'ordre $m - p$; en particulier, les $m - 1$ points qui sont les conjugués d'ordre 1 du point P sont les points dont le conjugué harmonique est le point P.

On pouvait d'ailleurs mettre la relation (p) sous la forme

$$\sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho - \rho_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho - \rho_p}\right) = 0.$$

sans écrire expressément la relation $((p))$.

3. Si le point P est à l'infini, on considère sur la droite les points P′ dont la puissance

$$P'P_1 \times P'P_2 \times \ldots \times P'P_m$$

est maximum ou minimum; ces points sont dits *les points centraux d'ordre* 1 du système donné. Cette expression est due à F. Lucas. En désignant par ρ l'abscisse d'un point de la droite, *comptée à partir d'une origine quelconque* O, si les abscisses des points donnés sont les racines de l'équation

$$[0] \qquad \varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \ldots (\rho - \rho_m) = 0,$$

les abscisses des points centraux d'ordre 1 sont don-

nées par l'équation

$$[1] \qquad \varphi'(\rho) \equiv \Sigma(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_{m-1}) = 0.$$

Il existe un point central d'ordre 1, et un seul, entre deux points donnés consécutifs quelconques.

On obtient ensuite les points centraux d'ordre 2 avec l'équation

$$[2] \qquad \varphi''(\rho) \equiv \Sigma(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_{m-2}) = 0.$$

On arrive enfin au point central d'ordre $m-1$, ou *centre des moyennes distances*, avec l'équation

$$[m-1] \qquad \varphi^{(m-1)}(\rho) \equiv \Sigma(\rho - \rho_1) = 0.$$

4. Si le point P′ est point central d'ordre p, l'un des *conjugués d'ordre* $m-p$ du point P′ est à l'infini. Les $m-p$ points centraux d'ordre p sont les points dont un conjugué d'ordre $m-p$ est à l'infini; les $m-1$ points centraux d'ordre 1 sont les points dont le conjugué harmonique est à l'infini.

Nous ne reparlerons pas de ce cas particulier.

II.

5. Considérons une courbe algébrique d'ordre m, dont l'équation en coordonnées cartésiennes, rendue homogène, est

$$f(x, y, z) = 0.$$

Soient P et P′ deux points dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 et X, Y, Z; la droite PP′ rencontre la courbe en m points P_i; si l'on pose

$$\frac{P'P_i}{PP_i} = -\frac{\lambda_i}{\mu_i},$$

on a pour les coordonnées du point P_i

$$x_i = \lambda_i x_0 + \mu_i X, \qquad \ldots \qquad \ldots$$

Les valeurs des m rapports $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ sont données par l'équation

$$f(\lambda x_0 + \mu X, \ldots, \ldots) = 0.$$

qui devient

$$\lambda^m f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\lambda^{m-1}\mu}{1}(X f'_{x_0} + \ldots + \ldots) + \ldots$$
$$+ \frac{\mu^m}{m!}(X f'_{x_0} + \ldots + \ldots)^{(m)} = 0,$$

ou encore

$$\mu^m f(X, Y, Z) + \frac{\mu^{m-1}\lambda}{1}(x_0 f'_X + \ldots + \ldots) + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda^m}{m!}(x_0 f'_X + \ldots + \ldots)^{(m)} = 0.$$

Dès lors, *en se reportant à la relation* ((*p*)), le point P′ sera conjugué d'ordre p du point P (ou encore le point P sera conjugué d'ordre $m - p$ du point P′) si l'on a

$$(X f'_{x_0} + \ldots + \ldots)^{(m-p)} = 0,$$

ou encore

$$(x_0 f'_X + \ldots + \ldots)^{(p)} = 0.$$

Le point P étant maintenant donné, l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire sera l'une ou l'autre des équations précédentes, X, Y, Z étant des coordonnées courantes; on prendra, pour la première polaire,

$$x_0 f'_X + \ldots + \ldots = 0,$$

et, pour la droite polaire,

$$X f'_{x_0} + \ldots + \ldots = 0.$$

6. La méthode précédente est celle de Salmon; voici celle dont j'ai parlé au début de cette Note.

Le point P étant donné, si l'on mène par ce point une sécante, les coordonnées d'un point de cette droite sont données par les formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho, \qquad z = z_0 = 1,$$

ou

$$\frac{x}{\rho} = \frac{x_0}{\rho} + \alpha, \qquad \frac{y}{\rho} = \frac{y_0}{\rho} + \beta, \qquad \frac{z}{\rho} = \frac{z_0}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

et les valeurs de $\frac{1}{\rho}$ relatives aux points d'intersection avec la courbe sont données par l'équation

$$F\left(\frac{1}{\rho}\right) = f\left(\frac{x_0}{\rho} + \alpha, \frac{y_0}{\rho} + \beta, \frac{z_0}{\rho}\right) = 0.$$

Les valeurs de $\frac{1}{\rho}$ relatives aux points de la première polaire sont données par l'équation

$$F'_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = x_0 f'_x\left(\frac{x_0}{\rho} + \alpha, \ldots\right) + \ldots + z_0 f'_z\left(\frac{x_0}{\rho} + \alpha, \ldots\right) = 0:$$

en remplaçant $x_0 + \alpha\rho, \ldots$ par X, Y, Z, on a l'équation de la première polaire sous la forme

$$x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z = 0.$$

L'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire est

$$(x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z)^p = 0.$$

Sur un point, cette méthode est inférieure à la précédente. La condition pour le point P′ d'être conjugué d'ordre p du point P ne diffère pas de la condition pour le point P d'être conjugué d'ordre $m - p$ du point P′, et ce fait est intuitif quand on écrit l'équation (p) sous la forme $((p))$ du n° 2; ce même fait se

présente donc de lui-même dans le calcul du n° 5, et l'on obtient en conséquence l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire sous deux formes différentes. La méthode actuelle donne une seule forme, celle qui est écrite ci-dessus; l'autre forme résulte alors seulement d'un fait analytique.

7. Félix Lucas, au lieu de

$$F\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m}\right),$$

écrit

$$\Phi(\rho) = \frac{(\rho - \rho_1) \ldots (\rho - \rho_m)}{\rho^m} = \frac{\varphi(\rho)}{\rho^m};$$

les conjugués d'ordre 1 du point P correspondent alors à l'équation

$$\Phi'(\rho) = 0,$$

ou

$$\rho \times \varphi'(\rho) = m\varphi(\rho),$$

qui est en apparence de degré m, en réalité de degré $m - 1$; on peut interpréter géométriquement cette équation (après l'avoir divisée par m) en introduisant les points centraux d'ordre 1 donnés par l'équation

$$\varphi'(\rho) = 0$$

avec une origine quelconque des coordonnées [1].

L'auteur observe d'ailleurs qu'on peut écrire, en considérant la dérivée logarithmique de $\Phi(\rho)$,

$$\frac{1}{\rho - \rho_1} + \frac{1}{\rho - \rho_2} + \ldots = \frac{m}{\rho},$$

de sorte que l'un quelconque des points P′ a pour

---

[1] Cette interprétation est bien connue dans le cas de la division harmonique; on a alors $P'P \times P'O = P'P_1 \times P'P_2$, le point O étant le milieu du segment P_1P_2.

conjugué harmonique le point P (comparer la fin du n° 2).

Relativement à la première polaire d'un point P par rapport à une courbe algébrique d'ordre m, une sécante menée par le point P ayant pour équation

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0),$$

l'équation aux x des points d'intersection avec la courbe est

$$f(x, y) = 0.$$

y représentant ici la fonction de x définie par l'équation ci-dessus, et l'on a pour les points conjugués d'ordre 1 (la définition des points conjugués étant projective cylindriquement)

$$(X - x_0)[f'_X + \lambda f'_Y] = mf(X, Y)$$

ou

$$(X - x_0)f'_X + (Y - y_0)f'_Y = mf(X, Y);$$

cette équation est du degré m en apparence, du degré $m - 1$ en réalité.

F. Lucas laisse l'équation de la première polaire sous cette forme, ce qui amène des complications pour les polaires successives; on doit écrire

$$x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z = 0, \quad \ldots.$$

[Avec la fonction φ, les conjugués d'ordre 2 du point P correspondent à l'équation

$$\rho^2\varphi''(\rho) - 2(m-1)\rho\varphi'(\rho) + m(m-1)\varphi(\rho) = 0,$$

qui est en apparence du degré m, en réalité du degré $m - 2$: après division par $m(m-1)$, cette équation peut s'interpréter au moyen des points centraux d'ordres 1 et 2. Et ainsi de suite. Cette écriture masque entièrement le fait que, si P' est conjugué

d'ordre p de P, P est conjugué d'ordre $m - p$ de P'. Elle conduit pour la polaire à une écriture

$$(X - x_0) f'_X + \ldots = m f(X, Y),$$

que n'intéresse pas le fait analytique dont il est question à la fin du n° 6.]

8. On peut, à la manière de Cotes, définir *a priori* le conjugué d'ordre $m - 1$ ou conjugué harmonique P' d'un point P par la relation

$$\frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots.$$

Au moyen des formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho,$$

on obtient alors l'équation de la droite polaire d'un point P sous la forme

$$(X - x_0) f'_{x_0} + (Y - y_0) f'_{y_0} + m f(x_0, y_0) = 0,$$

et l'on peut écrire

$$X f'_{x_0} + Y f'_{y_0} + Z f'_{z_0} = 0.$$

Cette relation a lieu entre les coordonnées de deux points $P(x_0, y_0, z_0)$ et $P'(X, Y, Z)$ tels que le second est conjugué harmonique du premier. Pour en déduire l'équation de la première polaire, lieu d'un point P' qui est conjugué d'ordre 1 du point P, il faut savoir que le point P est alors le conjugué harmonique du point P', ce qui donne la condition

$$x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z = 0.$$

On en déduit les équations des polaires successives.

Mais, plus encore que dans la méthode de Salmon, on fait ici abstraction de l'idée de maximum qui est essentielle dans la question.

[L'1a]

INTERPRÉTATION CONCRÈTE DE L'EXPRESSION

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c,$$

EN Y SUPPOSANT LES COORDONNÉES COURANTES REMPLACÉES PAR CELLES D'UN POINT DONNÉ;

PAR M. E. MALO.

Un des théorèmes les plus simples et les plus connus, mais en même temps l'un des plus intéressants du début de la Géométrie analytique, est le suivant :

Si, dans le premier membre de l'équation d'un cercle, en coordonnées cartésiennes rectangulaires,

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$

on remplace les coordonnées courantes x, y par les coordonnées x', y' d'un point déterminé, le résultat est égal au produit par a du carré ρ^2 de la tangente menée au cercle par le point (x', y') ou plutôt, par un motif qui apparaîtra de lui-même un peu plus loin, *au produit par a du carré ρ^2 du rayon du cercle qui, décrit du point (x', y') comme centre, coupe orthogonalement le cercle donné.*

On est, par là même, naturellement amené à rechercher quelle peut être l'interprétation géométrique, la signification concrète du résultat de la substitution aux coordonnées courantes, dans le premier membre de l'équation générale du second degré,

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

des coordonnées x', y' d'un point donné. Mais, bien qu'il y ait plus de deux siècles que la question ait dû nécessairement se poser, elle ne paraît pas avoir été résolue d'une façon entièrement satisfaisante et véritablement définitive; et c'est seulement dans le cas où l'on considère non pas un point *unique* (x', y'), mais *deux* points simultanément (x', y') et (x'', y''), et en comparant les résultats des substitutions, qu'on est parvenu à des théorèmes tels que le suivant (qui d'ailleurs s'étend à des courbes d'ordre quelconque, et conduit, comme corollaire, au théorème de Carnot) :

A *et* B *étant deux points du plan d'une conique, et* $\overline{AZ}$. $\overline{BT}$, *deux cordes parallèles rencontrant la conique en* P, Q, R, S, *le rapport* $\frac{\overline{AP}.\overline{AQ}}{\overline{BR}.\overline{BS}}$ *est une constante indépendante de la direction des cordes.*

Cependant, et c'est une référence que M. H. Brocard a eu l'extrême obligeance de me signaler aussitôt que je lui eus communiqué le résultat auquel j'étais parvenu, on trouve dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1864, p. 458) quelques lignes extraites d'une lettre de Transon à Gerono, avec une remarque de Mannheim; voici en substance ce passage :

« On paraît généralement ignorer que *la substitution des coordonnées d'un point* M, *dans le premier membre de l'équation d'une conique, est proportionnelle au produit de la perpendiculaire* MP, *abaissée du point* M *sur sa polaire, par la longueur interceptée à partir du point* M *sur la même perpendiculaire par l'un ou l'autre des axes.*

» M. Mannheim a observé que, lorsqu'il s'agit du

point de rencontre avec l'axe *non focal*, ce point appartient au cercle passant par le point P et par les foyers de la conique, de sorte que le produit envisagé est égal au carré de la tangente menée du point M à ce cercle [1]. »

Ce résultat, qui, par suite de la double acception qu'il comporte, n'est pas identique à celui qu'on trouvera ci-après, était resté inconnu de moi, et, ainsi que bien d'autres et après eux, je m'étais à diverses reprises, mais infructueusement, appliqué à la solution du problème, lorsque enfin l'occasion d'une question posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (n° 4440, 1914, p. 195), me l'a fait inopinément apercevoir.

Comment l'auteur (pseudonyme) de la question, ainsi que l'auteur (également pseudonyme) de la réponse qui y a été faite (*I.M*, 1915, p. 70), ne se sont-ils pas exactement rendu compte de l'intérêt véritable du sujet? C'est sans doute que le premier a trop exclusivement envisagé le cas de l'ellipse et surtout s'est attaché à des formules où entrassent les *angles excentriques* comme paramètres déterminateurs (ce qui n'est aucunement conforme à la position même de la ques-

---

[1] La remarque de Mannheim, qui, au fond, ajoute bien peu de chose à l'énoncé de Transon, est en outre incomplète, car, en désignant par K et L, N et Q, les points où la polaire de M et la perpendiculaire menée de M à cette polaire rencontrent respectivement le grand et le petit axe, les cercles de diamètre $\overline{LN}$ et $\overline{KQ}$, qui se coupent orthogonalement en P, passent encore, le premier par les foyers imaginaires, le second par les foyers réels de la conique.

Les relations contenues dans l'énoncé de Transon sont explicitement les suivantes (dans le cas de l'ellipse) :

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2 = a^2\,\overline{MP}.\overline{MN},$$

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2 = b^2\,\overline{MP}.\overline{MQ}.$$

tion), et que le second, dans sa réponse, a trop strictement suivi le canevas tracé.

Quoi qu'il en soit, et sans m'assujettir au point de vue où l'un et l'autre se sont limités, j'aborde sans plus tarder l'ordre de considération essentiel à mon objet.

Soit une conique que, d'abord et pour fixer les idées, je supposerai être une ellipse : d'un point M, extérieur, on pourra lui mener deux tangentes $\overline{MR}$, $\overline{MS}$, et ces tangentes seront les bissectrices extérieures, en R et S, des angles $\widehat{FRF'}$, $\widehat{FSF'}$, formés par les vecteurs focaux des deux points de contact. D'ailleurs, par un théorème connu, les droites $\overline{FM}$, $\overline{F'M}$ sont les bissectrices des angles $\widehat{RFS}$, $\widehat{RF'S}$, et de tout cela résulte que les distances du point M aux quatre droites $\overline{FR}$, $\overline{F'R}$, $\overline{FS}$, $\overline{F'S}$ sont égales; en d'autres termes : *Le quadrilatère formé par les rayons vecteurs focaux des points de contact des tangentes issues d'un point* M *est circonscrit à un cercle admettant ce point pour centre.*

Je cherche maintenant la mesure du rayon de ce cercle.

En désignant par x', y' les coordonnées du point M, l'équation de la corde $\overline{RS}$, polaire de M, est, en rapportant toute la figure aux axes de l'ellipse,

$$b^2 x' x + a^2 y' y - a^2 b^2 = 0,$$

et par conséquent l'équation du couple de points R, S sera

$$a^4(b^2 - y'^2)\lambda^2 + b^4(a^2 - x'^2)\mu^2$$
$$+ (b^2 x'^2 + a^2 y'^2)\nu^2 - 2a^2 b^2(y'\mu\nu + x'\nu\lambda + x'y'\lambda\mu) = 0.$$

L'équation des foyers réels étant d'autre part

$$c^2\lambda^2 - \nu^2 = 0,$$

l'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les vecteurs focaux, sera

$$k(c^2\lambda^2 - \nu^2) + a^2(b^2 - y'^2)\lambda^2 + \ldots = 0.$$

et le centre aura pour coordonnées

$$\frac{a^2b^2x'}{b^2x'^2 + a^2y'^2 - k}, \qquad \frac{a^2b^2y'}{b^2x'^2 + a^2y'^2 - k};$$

on obtiendra donc le cercle inscrit en faisant

$$k = b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2.$$

Moyennant cette valeur de k l'équation considérée doit être de la forme

$$(\lambda x' + \mu y' + \nu)^2 - \rho^2(\lambda^2 + \mu^2) = 0,$$

et cela conduit notamment à poser la relation

$$\frac{y'^2 - \rho^2}{b^2(a^2 - x'^2)} = \frac{1}{a^2},$$

qui se réduit à

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2 = a^2\rho^2.$$

Par conséquent, dans la supposition faite, *le résultat de la substitution des coordonnées du point* M (x', y') *aux coordonnées courantes rend le premier membre de l'équation de l'ellipse égal au produit par* a^2 *du carré du rayon du cercle inscrit dans le quadrilatère des vecteurs focaux aboutissant aux points de contact des tangentes issues du point* (x', y').

On voit que, si l'ellipse considérée se rapproche indéfiniment de la forme circulaire, le cercle inscrit, de centre M, tend à devenir tangent en R et S aux vec-

teurs $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, et, à la limite, il est orthogonal au cercle dans lequel l'ellipse s'est changée.

Si l'on compare le résultat précédent avec ceux de Transon (*voir* la note au bas de la page 159), on trouvera les relations

$$\rho^2 = \frac{b^2}{a^2}\overline{MP}.\overline{MQ},$$

$$\rho^2 = \overline{MP}.\overline{MN},$$

dont la deuxième permet d'énoncer le théorème que voici :

Le cercle inscrit dans le quadrilatère des vecteurs focaux aboutissant aux points de contact des tangentes issues d'un point M *coupe orthogonalement le cercle qui admet comme diamètre l'intervalle des points où le grand axe rencontre respectivement la polaire de* M *et la perpendiculaire abaissée de* M *sur sa polaire.*

Examinant maintenant le cas général de l'équation

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

point n'est besoin d'un calcul développé en tout détail pour reconnaître qu'on a

$$S' = \frac{a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4(ab - h^2)}}{2}\rho^2,$$

ρ^2 ayant la même signification que précédemment.

Mais en vue de vérifier qu'il en est bien ainsi on observera tout d'abord qu'on a pour $b = a$, $h = 0$,

$$S' = a\rho^2,$$

ce qui ramène au point même de départ. D'un autre côté, l'équation aux carrés des demi-longueurs d'axes

de la conique $S = 0$ étant

$$t^4 - \frac{(a+b)\Delta}{(ab-h^2)^2} t^2 - \frac{\Delta^2}{(ab-h^2)^3} = 0,$$

on en conclut

$$t^2 = -\frac{\Delta}{(ab-h^2)^2} \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab-h^2)}}{2},$$

et, par conséquent, en supposant Δ négatif, l'axe focal correspond au radical pris positivement, tandis que c'est l'inverse lorsque Δ est positif, si toutefois on a encore $a+b > 0$. D'ailleurs, lorsque le point dont on substitue les coordonnées est le centre de la conique, le résultat doit être $-b^2$, dans le cas de l'ellipse, et $+b^2$, dans le cas de l'hyperbole, comme on le reconnaît avec la plus grande facilité.

L'égalité supposée devient donc, d'une façon générale,

$$S' = -\frac{(ab-h^2)^2}{\Delta} a^2 \rho^2,$$

et, dans l'hypothèse particulièrement faite que (x', y') est le centre,

$$\frac{\Delta}{ab-h^2} = -\frac{(ab-h^2)^2}{\Delta} a^2 \rho^2.$$

Soit $a = b^2$, $b = a^2$, $c = -a^2 b^2$, $h = 0$, $\Delta = -a^4 b^4$; il viendra bien

$$\rho^2 = -b^2,$$

tandis que pour $a = b^2$, $b = -a^2$, $c = -a^2 b^2$, $h = 0$, $\Delta = a^4 b^4$, on trouvera

$$\rho^2 = b^2.$$

Enfin pour $a = c = f = h = 0$, $b = 1$, $g = -p$,

mais le point (x', y') étant quelconque, on aura

$$y'^2 - 2px' = \rho^2,$$

relation qu'il serait aisé d'établir directement.

En raison de ce qui précède et pour envisager maintenant le cas absolument général d'une équation donnée en coordonnées trilinéaires *normales*

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$

on aura, en substituant à x, y, z, les coordonnées *vraies*, c'est-à-dire les rapports

$$\frac{\varpi x'}{x' \sin A + y' \sin B + z' \sin C}, \ldots,$$

et non pas les coordonnées simplement proportionnelles x', y', z' du point considéré, ϖ étant mis en abrégé pour $2R \sin A \sin B \sin C$,

$$S' = \frac{\mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 - 4\Sigma_\infty}}{2}\rho^2.$$

ρ^2 ayant toujours la même signification géométrique, $\Sigma = 0$ étant l'équation *tangentielle* de la conique dont $S = 0$ est l'équation ponctuelle, Σ_∞ désignant le résultat de la substitution dans cette équation des coordonnées $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, de la droite à l'infini, et $\mathcal{H}$ étant enfin l'expression linéaire

$$a + b + c - 2f\cos A - 2g\cos B - 2h\cos C,$$

qui s'annule quand S est une hyperbole équilatère et devient égale à $2\sqrt{\Sigma_\infty}$ lorsque cette conique est un cercle.

En effet, l'équation aux carrés des demi-longueurs d'axes de la conique S étant cette fois

$$t^6 + \varpi^2 \frac{\mathcal{H}\Delta}{\Sigma_\infty^2} t^2 + \varpi^4 \frac{\Delta^2}{\Sigma_\infty^4} = 0$$

(Δ, discriminant de S, égal à

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2),$$

on en tire les valeurs

$$t^2 = -\frac{\varpi^2 \Delta}{\Sigma_x^2} \frac{\mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 - 4\Sigma_x}}{2},$$

d'où

$$\frac{\mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 - 4\Sigma_x}}{2} = -\frac{t^2 \Sigma_x^2}{\varpi^2 \Delta}$$

et

$$S' = -\frac{t^2 \Sigma_x^2}{\varpi^2 \Delta} \rho^2.$$

Lorsqu'il s'agit du centre on a

$$\begin{aligned} x' &= A \sin A + H \sin B + G \sin C, \\ y' &= H \sin A + B \sin B + F \sin C, \\ z' &= G \sin A + F \sin B + C \sin C \end{aligned}$$

(A, B, C, F, G, H, coefficients de l'équation tangentielle $\Sigma = 0$, c'est-à-dire $A = \frac{\partial \Delta}{\partial a}, \cdots$). Il en résulte

$$x' \sin A + y' \sin B + z' \sin C = \Sigma_x,$$

$$\begin{aligned} ax' + hy' + gz' &= \Delta \sin A, \\ hx' + by' + fz' &= \Delta \sin B, \\ gx' + fy' + cz' &= \Delta \sin C. \end{aligned}$$

$$S' = \varpi^2 \left(\frac{\begin{array}{c} x'(ax' + hy' + gz') \\ + y'(hx' + by' + fz') \\ + z'(gx' + fy' + cz') \end{array}}{(x' \sin A + y' \sin B + z' \sin C)^2} \right) = \varpi^2 \frac{\Delta}{\Sigma_x}$$

et par suite

$$\rho^2 = -\frac{1}{t^2} \frac{\varpi^4 \Delta^2}{\Sigma_x^3}.$$

Comme $\frac{\varpi^4 \Delta^2}{\Sigma_x^3}$ est le produit des carrés des demi-lon-

gueurs d'axes, de même signe que Σ_∞ et positif s'il s'agit d'une ellipse, négatif s'il s'agit d'une hyperbole, l'exactitude de la formule est mise en évidence aussi bien dans l'un que dans l'autre cas, pourvu qu'on entende par t^2 le carré du demi-grand axe, quelles que soient d'ailleurs les contingences qui naissent des signes des quantités Δ et $\mathcal{K}$, où l'on peut simplement supposer positif l'unique coefficient a. Enfin le cas de la parabole n'échappe pas à la formule finale, du moins dans la supposition que le point (x', y', z') est quelconque et en excluant bien entendu qu'il s'agisse du centre, alors rejeté à l'infini : il faut seulement calculer la limite du produit $t^2\Sigma_\infty^2$, de la forme $\infty \times 0$.

Une vérification plus particulière encore peut s'opérer en imaginant que S est le cercle circonscrit au triangle de référence,

$$S = 2(yz \sin A - zx \sin B + xy \sin C) = 0.$$

[A1a]

PROPRIÉTÉ DE DEUX SUITES SOMMABLES;

PAR M. C.-A. LAISANT.

1. Un récent article de M. Alezais [1] attire l'attention sur une question, d'ailleurs très simple sous sa forme primitive, qui a été l'objet de plusieurs extensions intéressantes, et que nous rappelons : si l'on considère les deux progresssions par différences

(a)	1	3	5	7	9	...
(α)	1	2	3	4	5	...

[1] 1915, p. 64. *Voir* aussi *Correspondance*, 1915, p. 114.

et si l'on prend dans la progression (a) des groupes successifs de termes dont les nombres sont indiqués par les termes de la progression (α), on obtient

$$(1)\quad (3\ 5)\quad (7\ 9\ 11)\quad \ldots$$

et la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe est n^3.

2. La généralisation a consisté à étendre la question à des progressions quelconques par différence. On peut la pousser beaucoup plus loin, en considérant des suites de nombres entiers telles que chaque terme soit une fonction de son rang, et qu'on sache en outre déterminer la somme des p premiers termes en fonction de p. C'est le cas, par exemple, d'une progression par quotient, ou de suites obtenues en ajoutant des progressions par quotient terme à terme, etc. Nous pouvons appeler de telles suites entières des *suites sommables*.

Considérons donc deux suites sommables, que nous pouvons écrire

$$(a)\qquad f(1)\quad f(2)\quad f(3)\quad \ldots\quad f(n)\quad \ldots$$

$$(\alpha)\qquad \varphi(1)\quad \varphi(2)\quad \varphi(3)\quad \ldots\quad \varphi(n)\quad \ldots$$

et telles que

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\mathrm{F}(n),$$

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=\Phi(n).$$

Si nous formons, dans la suite (a) à partir de $f(1)$, des groupes successifs de $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... termes, le rang du dernier terme du $n^{\text{ième}}$ groupe sera $\Phi(n)$; celui du dernier terme du groupe précédent serait $\Phi(n-1)$.

La somme, depuis $f(1)$ jusqu'au dernier terme du $n^{\text{ième}}$ groupe, est donc $\mathrm{F}[\Phi(n)]$ et, par suite, celle

des termes de ce $n^{\text{ième}}$ groupe est

$$F[\Phi(n)] - F[\Phi(n-1)].$$

Il est clair que, si l'on avait formé dans la suite (α) des groupes successifs de $f(1), f(2), \ldots$ termes, la solution s'obtiendrait par la permutation des lettres F et Φ.

3. Dans l'exemple très simple rappelé au début, nous avons

$$f(p) = 2p - 1, \quad F(p) = p^2, \quad \varphi(p) = p, \quad \Phi(p) = \frac{p(p-1)}{2}$$

et le résultat est par conséquent

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

En prenant au contraire 1, 3, 5, ... termes dans la progression 1, 2, 3, ..., on aurait

$$(1) \quad (2\ 3\ 4) \quad (5\ 6\ 7\ 8\ 9) \quad \ldots$$

et la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe serait donnée par la formule

$$\frac{n^2(n^2-1)}{2} - \frac{(n-1)^2[(n-1)^2+1]}{2}$$
$$= 2n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = n^3 - (n-1)^3.$$

On vérifie en effet que

$$3 + 5 = 2^3, \quad 7 + 9 + 11 = 3^3, \quad 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3, \ldots,$$
$$2 + 3 + 4 = 2^3 - 1^3, \quad 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 3^3 - 2^3,$$
$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 4^3 - 3^3, \ldots.$$

4. Dans le cas où les deux suites (a) (α) sont identiques, les fonctions F, Φ le sont aussi et le résultat cherché est

$$FF(n) - FF(n-1).$$

Par exemple, on vérifiera que les groupes

$$(1)\quad (2\ 3)\quad (4\ 5\ 6)\quad \ldots$$

ont pour sommes $\frac{n(n^2+1)}{2}$, n indiquant le rang de chacun d'eux, et que dans les suivants

$$(1)\quad (3\ 5\ 7)\quad (9\ 11\ 13\ 15\ 17)\quad \ldots,$$

les sommes sont exprimées par

$$n^4-(n-1)^4 \qquad \text{ou} \qquad (2n-1)[n^2-(n-1)^2].$$

Il peut arriver que $F\Phi(n)$ et $\Phi F(n)$ soient identiques, sans que les fonctions F et Φ le soient. Ainsi, dans les deux suites ci-dessous

$$(a)\qquad 1 \mid 7\quad 19\quad 37 \mid 61\quad 91\quad \ldots,$$

$$(\alpha)\qquad 1 \mid 3\quad 5\quad 7\quad 9\quad 11\quad 13\quad 15 \mid \ldots$$

les groupes de même rang ont mêmes sommes de termes.

La loi de formation de la suite (a) est facile à reconstituer.

5. Comme dernier exemple, prenons la suite des nombres impairs, et formons des groupes successifs de 1, 4, 9, ... termes, dont les nombres de termes sont les carrés de 1, 2, 3, ...

$$(1)\quad (3\ 5\ 7\ 9)\quad (11\ 13\ 15\ 17\ 19\ 21\ 23\ 25\ 27)\quad \ldots.$$

On a

$$F(p)=p^2, \qquad \Phi(p)=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6},$$

et la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe sera

$$\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2-\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)^2=\frac{(2n^2+1)n^3}{3}.$$

[M³6bα]

NOTE SUR LA COURBE DE VIVIANI;

PAR UN ANONYME.

Les théorèmes énoncés par Mlle Anne de Préhyr, sur la courbe de Viviani, dans le numéro d'août-septembre 1914 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, se démontrent aisément par la Géométrie analytique.

Soient

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - ax = 0$$

les équations de la sphère et du cylindre dont l'intersection constitue la courbe de Viviani. Désignons par A l'extrémité du diamètre du cercle (2) dirigé suivant Ox, par M un point quelconque de ce cercle, par φ l'angle MOA. Les coordonnées du point M sont $a\cos^2\varphi$ et $a\sin\varphi\cos\varphi$. Si l'on cherche l'intersection de la verticale menée par ce point avec la sphère, on trouve que l'ordonnée du point P, ainsi obtenu, est égale à $a\sin\varphi$. Les coordonnées de P sont donc

$$(3) \qquad x = a\cos^2\varphi, \qquad y = a\sin\varphi\cos\varphi, \qquad z = a\sin\varphi.$$

La dernière montre que l'ordonnée MP est égale à MA. Donc les triangles OMP et OMA sont égaux et, par suite, aussi les angles $\widehat{MOA}$ et $\widehat{MOP}$.

On peut encore dire que le lieu du point P s'obtient en faisant tourner les triangles MOA, autour de OM, de manière à les amener dans le plan vertical MOz.

Si, sur MP, on prend un point P_1 tel que $MP_1 = MO$, le lieu du point P_1 est une courbe dont l'étude peut utilement être associée à celle de la courbe de Viviani. Le triangle OMP_1 étant rectangle et isoscèle, on voit que la courbe en question résulte de l'intersection du cylindre (2) et du cône de révolution

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Des formules (3) on déduit sans peine

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin 2\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = a \cos 2\varphi, \qquad \frac{dz}{d\varphi} = a \cos\varphi;$$

puis

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -2a \cos 2\varphi, \quad \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -2a \sin 2\varphi, \quad \frac{d^2z}{d\varphi^2} = -a \sin\varphi.$$

Appelons A, B, C les coefficients de l'équation du plan osculateur en P à la courbe : on sait qu'on a

$$A = \frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2z}{d\varphi^2} - \frac{dz}{d\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2}$$

et les formules analogues. En effectuant les calculs, on trouve

$$A = a^2 \sin\varphi(1 + 2\cos^2\varphi), \qquad B = -2a^2 \cos^3\varphi, \qquad C = 2a^2.$$

Le plan tangent en P à la sphère (1) a pour équation

$$(4) \qquad x \cos^2\varphi - y \sin\varphi \cos\varphi + z \sin\varphi - a = 0.$$

Sa trace sur le plan xOy est représentée par

$$(5) \qquad x \cos^2\varphi + y \sin\varphi \cos\varphi - a = 0.$$

Appelons T le point d'intersection de OM avec la tangente en A au cercle (2). La droite représentée par (5) passe en T et est perpendiculaire à OT. Elle

enveloppe donc une parabole qui a pour sommet le point A et pour foyer le point O.

Pour trouver les coordonnées du point de l'arête de rebroussement de la surface développable enveloppée par les plans tangents à la sphère aux points de la courbe de Viviani, différentions deux fois l'équation (4), nous obtenons

$$x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi - z \cos\varphi = 0, \tag{6}$$

$$2x \cos 2\varphi + 2y \sin 2\varphi + z \sin\varphi = 0. \tag{7}$$

La première de ces équations représente le plan normal en P à la courbe de Viviani ; l'arête de rebroussement est donc bien une développée de cette courbe.

Les coefficients de l'équation (6) sont proportionnels à dx, dy, dz et ceux de l'équation (7) à d^2x, d^2y, d^2z. La droite qu'elles représentent est donc parallèle à la binormale. Ainsi, l'arête de rebroussement de la surface développable est située sur le cône obtenu en menant par le centre de la sphère des parallèles aux binormales de la courbe de Viviani.

Des équations (4), (6), (7) on tire, pour les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement, les valeurs suivantes :

$$x = \frac{a \sin\varphi (1 - 2\cos^2\varphi)}{\sin\varphi (2 + \cos^2\varphi)} = \lambda A,$$

$$y = \frac{-2a \cos^3\varphi}{\sin\varphi (2 + \cos^2\varphi)} = \lambda B,$$

$$z = \frac{2a}{\sin\varphi (2 + \cos^2\varphi)} = \lambda C,$$

en posant

$$\lambda = \frac{1}{a \sin\varphi (2 + \cos^2\varphi)};$$

d'où il résulte que la distance de ce point à l'origine

est égale à

$$(8) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \lambda\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Le plan osculateur en P a pour équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées de P. Le centre de courbure, d'après le théorème de Meusnier, est situé sur la perpendiculaire abaissée de O sur ce plan. Sa distance à l'origine est égale à

$$R = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

On a donc

$$Rr = \lambda(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

et, si l'on fait les calculs, on trouve

$$Rr = a^2.$$

La tangente en P a pour équations

$$\frac{x - a\cos^2\varphi}{-a\sin 2\varphi} = \frac{y - a\sin\varphi\cos\varphi}{a\cos 2\varphi} = \frac{z - a\sin\varphi}{a\cos\varphi}.$$

Elle perce le plan xOy en un point Q dont les coordonnées sont

$$x = a(1 + \sin^2\varphi), \qquad y = \frac{a\sin^3\varphi}{\cos\varphi}.$$

Ce point est naturellement situé sur la tangente en M au cercle (2) et la distance MQ est égale à $a \operatorname{tang}\varphi$; c'est-à-dire à MT. De plus, le calcul du coefficient angulaire montre que AQ est parallèle à OT. La figure MTAQ est un rectangle et le lieu du point Q est la cissoïde, podaire de la parabole enveloppée par TQ, par rapport à son sommet.

Puisqu'on sait tracer, avec la règle et le compas, la

tangente à cette courbe qui, avec le point P, détermine le plan osculateur à la courbe de Viviani; on sait, par cela même, construire ce plan et par suite le centre du cercle osculateur qui s'obtient en projetant sur lui le point O.

La droite qui joint le point P au point $(0, 0, a)$ a pour équations

$$\frac{x}{a\cos^2\varphi} = \frac{y}{a\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{z-a}{a\sin\varphi - a}.$$

Sa trace sur xOy est déterminée par les relations

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\varphi, \qquad x = \frac{a\cos^2\varphi}{1-\sin\varphi};$$

d'où l'on déduit

$$\sin\varphi = \frac{x^2+y^2-ax}{x^2+y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{y}\,\frac{x^2+y^2-ax}{x^2+y^2}$$

et par suite

$$(x^2+y^2)(x-2a)+a^2x = 0.$$

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point A, cette équation devient

$$x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0,$$

équation d'une strophoïde droite dont le sommet est en O et le point double en A.

Les équations de la droite qui joint P au point $(-a, 0, 0)$ sont

$$\frac{x+a}{\cos^2\varphi+1} = \frac{y}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{z}{\sin\varphi}.$$

Sa trace sur le plan yOz, quand φ varie, est la courbe

$$(y^2+z^2)^2 - a^2(z^2-y^2) = 0;$$

c'est une lemniscate.

On trouve de même sans difficulté que la droite

$$\frac{x-a}{\cos^2\varphi - 1} = \frac{y}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{z}{\sin\varphi},$$

qui joint P au point $(a, 0, 0)$, a pour trace sur ce plan l'hyperbole équilatère

$$z^2 - y^2 = a^2.$$

Enfin, la droite horizontale, qui rencontre à la fois l'axe des z et la courbe de Viviani, a pour équations

$$y = x \operatorname{tang}\varphi, \qquad z = a\sin\varphi.$$

Elle engendre le conoïde représenté par

$$z^2(x^2+y^2) = a^2y^2.$$

Celui-ci coupe le cylindre

$$x^2+y^2-a^2=0$$

suivant deux courbes planes situées dans les plans

$$y \pm z = 0.$$

[R5C]

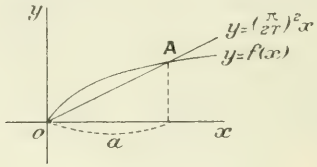
SUR LE MOUVEMENT RECTILIGNE TAUTOCHRONE. GÉNÉRALISATION;

PAR M. E. CAHEN.

C'est une question classique de trouver quelle doit être la loi de la force agissant sur un point matériel, mobile sur une droite, dans le cas où cette loi ne dépend que de la position du mobile; pour que ce mo-

bile, abandonné sans vitesse initiale, mette toujours le même temps pour atteindre un certain point O de cette droite, quel que soit le point de départ. Cette question se traite ordinairement par une méthode due à Puiseux (*voir*, par exemple, Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, 2e édit., p. 340). Cette méthode emploie entre autres un changement de variables, une dérivation sous le signe $\int$ et la résolution d'une équation différentielle.

Voici une autre méthode, beaucoup plus simple. Prenons le point O comme origine des abscisses comp-



tées sur la droite. Soit $-f(x)$ l'expression de la force qu'il faut appliquer au point M, d'abscisse x, pour qu'il arrive en O dans le temps T. (On suppose, ce qui est permis, que la masse de M est égale à 1.)

Or, d'après l'étude directe du mouvement vibratoire, on connaît une solution, à savoir la force

$$-\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x.$$

On va montrer qu'il n'y en a pas d'autre, en supposant la fonction $f(x)$ soumise à une restriction qui apparaîtra dans la démonstration.

En effet, si la fonction $f(x)$ n'était pas identique à la fonction $\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$, il y aurait un intervalle fini o, a, dans lequel $f(x)$ serait constamment plus grand ou

constamment plus petit que $\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$; supposons constamment plus grand pour fixer les idées (voir *figure*). Alors il est évident que si le mobile était abandonné sans vitesse initiale, à une distance a de l'origine et soumis à la force $-f(x)$, il mettrait moins de temps pour arriver en O que s'il était soumis à la force

$$-\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x,$$

c'est-à-dire un temps moindre que T.

La restriction annoncée plus haut est que le point A existe, c'est-à-dire que la courbe $y = f(x)$ ne coupe pas la droite $y = \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$ en une infinité de points voisins de O.

Mais une pareille restriction existe aussi dans la démonstration de Puiseux, car on y trouve le passage suivant (Appell, *loc. cit.*, p. 342) : « Cette expression doit être nulle quel que soit z_0, ce qui exige que la fonction soumise à l'intégration soit identiquement nulle, car si elle ne l'était pas *on pourrait prendre* z_0 *assez petit pour que, entre les limites* o *et* z_0, *cette fonction garde un signe constant.* » Ce qui revient à dire que la courbe qui représente ladite fonction ne peut couper une infinité de fois l'axe des abscisses aux environs du point A.

Si l'on considère des fonctions dont la courbe représentative couperait la droite $y = \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$ une infinité de fois entre O et un point aussi rapproché qu'on veut de O $\left[\text{par exemple, } y = \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x + a x^n \sin\frac{b}{x}\right]$, rien ne dit qu'une telle loi de force ne satisferait pas au tautochronisme.

Il nous semble que cette démonstration, outre qu'elle est plus simple que celle de Puiseux, met mieux en évidence la raison d'être du théorème et les conditions dans lesquelles il est exact.

De plus, cette démonstration se généralise. Supposons qu'on cherche la loi de force telle que le mobile abandonné sans vitesse initiale du point d'abscisse x_0 mette le temps $F(x_0)$ pour arriver en O. Si l'on a trouvé une solution, à savoir $-f(x)$, il n'y en a pas d'autre; pourvu qu'on n'admette pas de loi de force $-f_1(x)$ telle que les courbes $y = f(x)$ et $y = f_1(x)$ se coupent en une infinité de points voisins de l'origine.

Par exemple, un point soumis à une force constante, abandonné sans vitesse initiale au point d'abscisse x_0, met, pour venir jusqu'à l'origine, un temps proportionnel à $\sqrt{x_0}$. Il n'y a pas d'autre loi de force satisfaisant à cette condition, sauf peut-être des forces qui repasseraient un nombre indéfini de fois par la même valeur dans les environs du point O.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Équation générale des paraboles qui passent en un point donné et ont en ce point un rayon de courbure donné. (On prendra le point pour origine, la tangente en ce point pour axe des x, et l'on désignera par α l'angle de la direction de l'axe avec Ox.)*

2° *Enveloppe des axes de ces paraboles. Construire la courbe.*

3° *Longueur totale de la courbe. Rayon de courbure en un point.*

4° *Surface comprise à l'intérieur de la courbe.*

5° *Trajectoires orthogonales des axes des paraboles.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Calculer, par la méthode trigonométrique ou la méthode de Newton avec trois décimales, les racines de l'équation*

$$x^3 + 3x^2 - 16x - 10 = 0.$$

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$x\frac{dy}{dx} - y = k\left(x + y\frac{dy}{dx}\right).$$

Équation de la courbe en coordonnées polaires.

III. *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \cos x + x\sin x.$$

(Juin 1914.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère le système d'équa-*

tions différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dB}{ds} = pC - rA, \\ \dfrac{dC}{ds} = -pB, \\ \dfrac{dA}{ds} = rB, \end{cases}$$

système par lequel on veut déterminer les fonctions inconnues A, B, C, *de la variable s, connaissant les fonctions données p et r.*

Vérifier que ce système dont l'ensemble $A_1 B_1 C_1$ *désigne une solution particulière possède toujours les deux intégrales suivantes :*

$$A^2 + B^2 + C^2 = \text{const.}; \qquad AA_1 + BB_1 + CC_1 = \text{const.}$$

II. *En n'envisageant que les solutions du système* (1) *vérifiant la relation*

$$(2)\qquad A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

on fait le changement suivant de fonctions

$$(3)\qquad \begin{cases} B = \cos\theta, \\ C = \sin\theta\cos w, \\ A = \sin\theta\sin w, \end{cases}$$

aux nouvelles fonctions inconnues θ *et* w; *on demande de former les deux équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions* θ *et* w *de la variable s.*

Introduire, dans le résultat obtenu, les données nouvelles ω *et* u *fonctions de s, liées aux anciennes p et r par les relations*

$$(4)\qquad \begin{cases} r = \omega\cos u, \\ p = \omega\sin u. \end{cases}$$

III. *Que sera la fonction inconnue* w *si* θ *se réduit à une constante?*

IV. *On sait que, si p et r désignent respectivement la*

torsion *et la* courbure *d'une courbe gauche en fonction de l'arc s de cette courbe, le système* (1) *sera satisfait quand on y remplace* A, B, C *par les cosinus des angles que forment avec toute direction fixe de l'espace les directions respectives suivantes :*

1° *La direction de la tangente* T *à la courbe;*
2° *La direction de la normale principale* N;
3° *La direction de la binormale* Q *à la courbe;*

$$(5)\qquad \begin{cases} A = \cos(\widehat{T, U}), \\ B = \cos(\widehat{N, U}), \\ C = \cos(\widehat{Q, U}). \end{cases}$$

Considérons alors les courbes gauches G *dont la normale principale fait un angle constant avec une direction fixe* OZ.

On demande d'appliquer la solution trouvée pour la question III *à la détermination des fonctions correspondantes* A″, B″, C″ *qui doivent remplacer les fonctions* A, B, C *lorsque la direction* U *coïncide avec* OZ.

Épreuve pratique. — 1° *Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0.$$

2° *Que représente la surface*

$$(x + y - 3z)^2 + x + y - 5z = 0.$$

(Juin 1914.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\sin x \cos x \frac{dy}{dx} - y + 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 = 0.$$

2° *Désignant par* $y_1(x)$ *la solution particulière de*

l'équation précédente qui prend la valeur numérique $\frac{1}{2}$ *pour* $x = \frac{\pi}{4}$, *construire la courbe représentative de cette solution.*

3° *Calculer les termes du développement en série de* $y_1(x)$ *suivant les puissances entières de* x *jusqu'au terme de degré* 3 *en* x *inclusivement.*

II. *Les axes* OX, OY, OZ *étant supposés rectangulaires, on considère la surface* (S) *représentée par l'équation*

$$(x^2 + y^2)z^2 - R^2x^2 = 0,$$

où R *désigne une longueur donnée :*

1° *Construire les sections de cette surface par des plans parallèles aux plans coordonnés.*

2° *Vérifier que la surface est un conoïde de plan directeur* XOY *et d'axe* OZ, *dont les génératrices sont tangentes à la sphère* (Σ) *de rayon* R *qui est tangente en* O *au plan* YOZ. *Soit* (C) *le lieu du point de contact de la génératrice avec la sphère* (Σ) : *montrer qu'en un point quelconque de* (C) *la surface* (S) *et la sphère* (Σ) *ont même plan tangent.*

3° *Projections de la courbe* (C) *sur les trois plans coordonnés.*

Épreuve pratique. — *Soient une ellipse de centre* O *et de sommets* A, B, *tels qu'on ait*

$$OA = 10^m, \qquad OB = 5^m;$$

A′, B′ *les milieux respectifs de* OA, OB; M, M′ *les points d'intersection de la droite* A′B′ *avec l'ellipse :*

1° *Calculer à* 1^{mm} *près les distances aux axes des points* M *et* M′.

2° *Calculer l'aire comprise entre la droite* MM′ *et l'arc d'ellipse* MABM′. *Indiquer l'approximation du résultat obtenu.* (Juin 1914.)

Épreuve théorique. — I. *Pour quelles valeurs des con-*

stantes α *et* β *l'expression*

$$\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}+\sin(\alpha y)-y\sin(\alpha x)\right]dx$$
$$+\left[\frac{1}{(y^2-1)^2}+x\cos(\beta y)+\cos(\beta x)\right]dy$$

est-elle la différentielle d'une fonction $U(x, y)$? *Calculer* $U(x, y)$ *dans ce cas.*

II. *Une parabole* (P) *de paramètre constant* p *tourne dans son plan autour de son sommet* O. *Dans chaque position, on lui mène la tangente* (T) *parallèle à une droite fixe. On demande :*

1° *Le lieu du point de contact* M *de* (P) *avec la tangente* (T);

2° *Le lieu du point* C, *centre de courbure de* (P) *en* M.

Épreuve pratique. — 1. *Construire, par rapport à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *la courbe représentée par l'équation*

$$y = x^3 \mathrm{L}x - x - 1,$$

où $\mathrm{L}x$ *désigne le logarithme népérien de* x.

2. *Calculer, avec trois décimales exactes, la racine de l'équation*

$$x^3 \mathrm{L}x - x - 1 = 0.$$

(*On rappelle que* $\mathrm{L}10 = 2,3026$.) (Novembre 1914.)

Clermont.

Épreuve théorique. — *Soit le plan* (Π) *représenté par l'équation*

$$x\cos u + y\sin u + vz + \cos 2u + v^2 = 0.$$

1° *Quand* u *et* v *varient*, (Π) *enveloppe une surface* (Σ). *Calculer les coordonnées du point de contact* M, *en fonction de* u *et* v. *Montrer que* (Σ) *admet les trois plans de coordonnées pour plans de symétrie.*

2° *Lorsque v seul varie, montrer que* (Π) *enveloppe un cylindre, circonscrit à* (Σ) *le long d'une parabole, section droite du cylindre. Équation de ce dernier. Déterminer le plan* (P), *l'axe* (A) *et le sommet* S *de la parabole.*

Déterminer et construire le lieu (L) *de* S *et l'enveloppe* (E) *de* (A). *Quelle relation y a-t-il entre ces deux courbes? Calculer leurs rayons de courbure.*

Soient α, β *les points de rencontre de* (A) *avec* Ox *et* Oy, I *leur milieu,* γ *la projection de* O *sur* (A). *Prouver que* S *est au milieu de* Iγ.

3° *Quel est le lieu de* M *quand u seul varie? Le construire dans les cas* $v = 0$ *et* $v = \sqrt{3}$. *Déterminer l'arête de rebroussement de l'enveloppe de* (Π) *et montrer que c'est une hélice sur le cylindre dont* (E) *est section droite.*

4° *Calculer les rayons de courbure principaux de* (Σ) *au point* Q($u = 0$, $v = 0$).

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$2y'' - 5y' + 3y = xe^x + e^{\frac{3}{2}x};$$

déterminer les constantes de manière que, pour $x = 0$, y *et* y' *soient nuls.* (Juin 1914.)

Lyon.

Composition écrite. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\cos x \frac{dy}{dx} - 2y \sin x = \cos^3 x.$$

II. *Les axes* Oxyz *étant rectangulaires, on donne les deux surfaces qui ont pour équations*

$$(S) \qquad x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

1° *Nature et position respective des deux surfaces.*

2° *Étudier la projection de leur intersection sur les divers plans de coordonnées. Montrer que cette intersection se compose de deux ellipses. Calculer l'aire de ces ellipses.*

3° *Calculer l'aire de la portion de surface* (C) *comprise à l'intérieur de* (S).

4° *Volume du solide commun aux deux surfaces.*

Épreuve pratique. — I. 1° *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = \frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1}.$$

Minimum de y. Asymptotes. Position de la courbe par rapport aux asymptotes.

2° *Nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite* $y = 3$. *Calculer à* $\frac{1}{10}$ *près l'abscisse de l'un de ces points.*

II. *Déterminer les fonctions* $z(x, y)$ *telles qu'on ait*

$$dz = \frac{(y^2 + y)\,dx + (x^2 + x)\,dy}{(x + y + 1)^2}.$$

(Juillet 1914.)

Marseille.

Composition écrite. — 1. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\lambda - y},$$

où a *et* λ *sont deux constantes positives données.*

2. *L'intégrale, à une constante près, peut se mettre sous la forme paramétrique*

$$x = a \sin\varphi - \lambda\varphi,$$
$$y = a \cos\varphi.$$

Discuter les différentes formes de courbes déterminées par ces équations quand λ *varie.*

3. *Calculer la longueur de l'arc de courbe quand on a*

$$\lambda = a.$$

Épreuve pratique. — 1° *Une barre pesante et homo-*

gène OA *de longueur a est mobile dans un plan vertical autour de son extrémité* O *qui est fixe.*

A l'origine des temps, cette barre est horizontale et elle est lancée vers le bas avec une vitesse angulaire $\sqrt{\frac{3g}{a}}$.

On demande de trouver la vitesse angulaire :

1° *Quand la barre est verticale et dirigée vers le bas;*

2° *Quand elle est verticale et dirigée vers le haut.*

Au bout de combien de temps atteint-elle la première ou la seconde position?

2° *Calculer, par la méthode de Simpson, l'intégrale*

$$\int_0^1 \cos\left[\frac{\pi}{2}x^2\right]dx.$$

On divisera l'intervalle d'intégration en dix parties égales. (Juin 1914.)

Composition écrite. — 1. *Trouver une courbe* C *passant par l'origine des coordonnées et satisfaisant à l'équation différentielle*

$$x\frac{dy}{dx} + y = ax^2 + b.$$

Choisir b de sorte que la courbe C *soit symétrique par rapport à l'axe des y, les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.*

2. *A chaque point* M *de coordonnées x et y de la courbe* C *on fait correspondre un point* M_1 *de coordonnées x et* $y_1 = \lambda y$ *d'une seconde courbe* C_1. *Le point* M_1 *est donc obtenu en augmentant l'ordonnée y de* M *dans un rapport constant* λ. *On mène ensuite le rayon qui va de l'origine* O *des coordonnées au point* M *de la courbe* C. *Ce rayon coupe la courbe* C_1 *en un point* M′ *évidemment différent de* M_1. *Démontrer que la tangente en* M *à la courbe* C *et la tangente en* M′ *à la courbe* C_1 *sont parallèles.*

3. *Calculer les courbures en* M, *en* M_1 *et en* M′.

4. *Le rayon vecteur détermine deux segments de courbes. Calculer leurs aires et l'aire de leur différence.*

SOLUTION.

On a, pour la courbe C,

$$y = \frac{a}{3} x^2$$

et, pour la courbe C_1,

$$y_1 = \frac{a\lambda}{2} x^2.$$

On a donc, au point M′,

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{\frac{a\lambda}{3} x'^2}{\frac{a}{3} x^2}$$

et, par suite, en appelant r et r' les longueurs des rayons vecteurs,

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{r'}{r} = \frac{1}{\lambda},$$

c'est-à-dire que les courbes C et C_1 sont homothétiques par rapport à l'origine et, par suite, les tangentes aux points homologues M et M′ sont parallèles.

Pour les courbures, on a, en M,

$$\frac{1}{R} = \frac{2a}{9(9 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

en M_1,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2a\lambda}{9(9 + 4a^2\lambda^2x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et, en M′,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{\lambda R}.$$

Pour le segment parabolique OM, soit P le pied de l'ordonnée du point M, on sait que

$$\text{secteur OM} = \frac{1}{3} \text{ triangle OPM}.$$

On aura, de même,

$$\text{secteur OM}' = \frac{1}{3} \text{ triangle OP}'\text{M}'$$

et, pour la différence δ des deux secteurs, on aura

$$\delta = \frac{1}{3} \text{ trapèze rectiligne PMM'P'}.$$

Épreuve pratique. — 1° *Construire avec précision la courbe*

$$y = \frac{\sin x}{x} - x$$

quand x varie de zéro à 2π.

2° *Trouver le mouvement d'un point pesant, mobile dans un plan vertical, et sollicité par une force horizontale égale à son poids, sachant que primitivement le point est lancé avec une vitesse horizontale égale à 2^m par seconde.* (Novembre 1914.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *On donne une ellipse et les tangentes aux sommets* A, A' *du grand axe. Une tangente quelconque coupe ces tangentes fixes aux points* T *et* T' :

1° *Démontrer que le produit des segments* AT *et* A'T' *est constant et que la circonférence* C, *ayant pour diamètre* TT', *passe par les foyers de l'ellipse.*

2° *Par l'un des foyers on mène le diamètre de la circonférence* C. *A l'autre extrémité* M *de ce diamètre on mène la tangente* MM' *au cercle* C; *trouver l'enveloppe de cette tangente, lorsque la tangente* TT' *à l'ellipse se déplace. Si* M' *est le point de contact de la droite* MM' *avec son enveloppe, montrer que* M *est le milieu de la portion de cette droite comprise entre* M' *et le grand axe de l'ellipse prolongé.*

3° *On considère une tangente au cercle* C *perpendiculaire au grand axe de l'ellipse. Trouver le lieu de son point de contact. Montrer comment se déplace ce point, lorsque le point de contact de la tangente à l'ellipse décrit l'ellipse dans un sens déterminé, et préciser les parties du lieu qui correspondent à des tangentes réelles.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'aire de la portion du paraboloïde*

$$x^2 + y^2 = 2az$$

comprise à l'intérieur du cylindre

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

(Juin 1914.)

Épreuve écrite. — *Une lemniscate est représentée par l'équation*

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega.$$

1° *Calculer les angles que forme la tangente avec le rayon vecteur* OM *et avec l'axe* Ox.

2° *Calculer les distances de l'origine à la tangente et aux points où cette tangente coupe les axes rectangulaires* Ox *et* Oy. *Calculer l'aire du triangle formé par la tangente et ces deux axes.*

3° *Exprimer cette aire en fonction de* $\operatorname{tang} 2\omega$ *et étudier sa variation lorsque le point de contact décrit la lemniscate; en particulier, lorsque le point de contact reste entre les points où la tangente coupe les parties positives des axes* Ox *et* Oy.

4° *Étant donné un point* M *sur la lemniscate, déterminer un autre point* M', *sur la même boucle, tel que les tangentes en* M *et* M' *soient rectangulaires. Calculer l'aire limitée par l'arc* MM' *et les deux rayons vecteurs* OM *et* OM'. *Quel est le minimum de cette aire.*

Épreuve pratique. — *Que deviennent les intégrales*

$$\int_0^1 \frac{x-x^3}{1-x^6}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{x^3-x}{x^6-1}\,dx,$$

si l'on pose $x = \frac{1}{y}$ *et* $y = +\sqrt{t}$.

Calculer $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t+t^2}$ *et en déduire les valeurs des deux premières intégrales.* (Novembre 1914.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Développées des courbes planes.*

II. *On considère l'hélice définie en coordonnées rectan-*

gulaires par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

où t désigne un paramètre variable, a et b des constantes.

En un point quelconque M *de l'hélice, on mène la tangente* MP *qui rencontre en* P *le plan* XOY. *Montrer que les coordonnées* X, Y *du point* P *s'expriment en fonction de la variable t par les formules*

$$(2)\qquad X = a\cos t + at\sin t, \qquad Y = a\sin t - at\cos t.$$

Quand le paramètre t varie, le point P *décrit une courbe* (C). *Étudier cette courbe : tangente, normale, longueur d'arc, rayon de courbure, centre de courbure, développée.*

Expliquer, par des considérations géométriques, les résultats trouvés.

Épreuve pratique. — *Soit un point* M *de masse unité, mobile sur* Ox, *soumis :* 1° *à une force répulsive égale à* OM; 2° *à une force fonction du temps et égale à $e^{\omega t}$, où ω est une constante.*

I. *Trouver la relation qui lie x au temps t. On supposera successivement $\omega \neq \pm 1$, $\omega = 1$ et $\omega = -1$.*

II. *Construire la courbe $x = e^t + e^{-t} + \frac{t}{2}e^t$ et trouver l'aire de cette courbe comprise entre l'axe des t, la courbe et les droites $t = 0$, $t = T$.* (Juin 1914.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

829.

(1867, p. 159.)

On donne dans un plan une ellipse (E) *et une circonférence* (O) *concentriques. Une seconde circonférence* (O′) *roule sans glisser sur la première. On demande le lieu des points* M *d'intersection des tangentes communes à la circonférence* (O′) *et à l'ellipse* (E).

E. Deman.

Solution.

Par M. H. Brocard.

Cette question étant demeurée non résolue depuis bientôt un demi-siècle, je me bornerai à démontrer que sa solution aurait pu être produite en observant sa corrélation très intime avec une question analogue et traitée à diverses reprises.

Soient K, L deux points d'intersection de l'ellipse (E) et du cercle (O′).

Si, pour un instant, on ne tient pas compte du cercle (O), le problème sera presque identique à celui du lieu (M) pour des cercles (O′) *variables*, passant par les points K, L.

Or, c'est là une variante bien connue du problème que Chasles a proposé au Concours général de 1844 (*voir* 1844, pp. 377, 425-431 et 495-503; 1851, pp. 408-411). Elle a été, depuis, maintes fois étudiée, comme on le verra ici au Volume de 1880, pp. 122-133 (Le Cointe) et 184-188 (G. Darboux).

J'estime qu'il suffira de suivre exactement les indications de ces deux articles pour obtenir rapidement la solution analytique de la question 829.

On aura d'abord les équations de l'ellipse et du cercle

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$(x-d)^2 + (y-e)^2 - r^2 = 0,$$

et la condition de tangence des cercles (O) et (O′) se réduira simplement à

$$(\mathrm{T}) \qquad d^2 + e^2 = l^2.$$

On formera ensuite les équations des deux tangentes menées de $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ à l'ellipse (E) et au cercle (O′); mais les deux couples de tangentes devant coïncider, les deux équations précitées seront identiques. On en déduira trois nouvelles égalités entre les quantités d, e et une troisième λ.

Il restera à éliminer d, e et λ entre ces équations et l'équation (T).

La question étant ainsi classée, quelque lecteur voudra bien sans doute achever cette recherche qui, très probablement, aboutira à une équation (M) du sixième degré, avec des réductions possibles, comme pour le problème de Chasles (1880, *loc. cit.*).

937.

(1869, p. 275.)

Une ellipse roule sur une autre ellipse. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes.

DAUPLAY.

SOLUTION.

Par M. H. BROCARD.

Si l'ellipse mobile (E′) était remplacée par un cercle, et qu'il fallût exprimer l'égalité d'un arc AM′ du cercle à un arc AM de l'ellipse fixe (E), la question ainsi transformée serait manifestement insoluble. Cependant, elle peut se résoudre assez simplement, mais parce que la condition de roulement du cercle n'a pas à intervenir : il suffit que le cercle se déplace par translation.

L'impossibilité de traduire l'égalité des deux arcs AM′ et AM d'ellipses (E′) et (E) s'aggravera encore de ce fait que les deux ellipses données sont quelconques et tangentes en un point quelconque. Il n'y aura pas de formules capables de représenter la situation de l'ellipse mobile (E′).

Je ne m'explique pas que cette question ait pu être proposée; elle ne pourrait même servir de sujet à un Grand Prix de Mathématiques.

[K¹2b][K¹5b]

SUR QUATRE TRIANGLES HOMOTHÉTIQUES;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

M. Neuberg a proposé, dans *Mathesis*, mai 1914, p. 144, sous le n° 1967 *bis*, la question suivante :

« H *étant l'orthocentre du triangle* ABC, *on prolonge les droites* HA, HB, HC *des quantités* $AA' = r_a$, $BB' = r_b$, $CC' = r_c$, *où* r_a, r_b, r_c *désignent les rayons des cercles exinscrits à* ABC. *Trouver quelques propriétés du triangle* A'B'C'. »

qui nous paraît un intéressant sujet d'études, rapprochée de la question de Mathématiques élémentaires posée en 1873 au concours d'Agrégation des Sciences mathématiques.

Le triangle A'B'C' et le triangle DEF (D, E, F étant les contacts du cercle inscrit I respectivement avec les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC) ayant beaucoup d'analogie, nous essaierons de réunir ici leurs plus importantes propriétés. Nous associerons ces triangles entre eux, puis aux deux suivants : $I_aI_bI_c$ des centres des cercles exinscrits à ABC et MNP des milieux de H_a, H_b, H_c.

Pour ce qui suivra nous appellerons, dans le triangle ABC, A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés; A_2, B_2, C_2 les pieds des hauteurs; D_a, E_a, F_a, D_b, E_b, F_b, D_c, E_c, F_c

les contacts des cercles exinscrits I_a, I_b, I_c avec les côtés BC, CA, AB respectivement; r_a, r_b, r_c les rayons

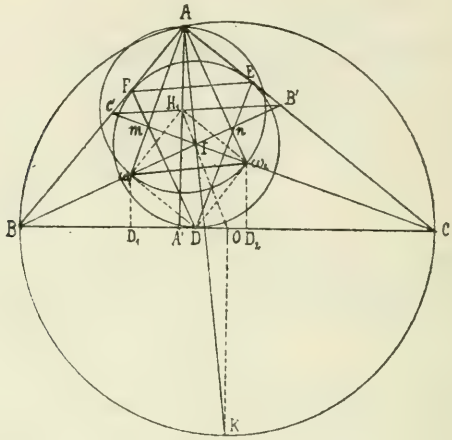


Fig. 1

de ces cercles; O le centre du cercle circonscrit de rayon R et H l'orthocentre.

1. Le triangle DEF des points de contact du cercle inscrit I avec les côtés du triangle ABC a ses angles égaux à

$$90^\circ - \frac{A}{2}, \quad 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Soit γ l'intersection de EF avec la bissectrice CI. Les deux droites CE et Iγ sont antiparallèles par rapport à EF et CI, car

$$\widehat{CI\gamma} = \frac{1}{2}(B + C) = 90^\circ - \frac{A}{2} = \widehat{AEF}.$$

Les quatre points C, I, γ, E sont donc sur un cercle

de diamètre CI et l'angle $I\gamma C$ est droit. γ, qui est le pied de la hauteur du triangle IBC, est donc sur DE; de même β pied de la hauteur $B\beta$ est aussi sur DE, et *les côtés du triangle* DEF *contiennent respectivement les pieds de deux des hauteurs des triangles* IBC, ICA, IAB.

Nous avons montré de plus que les points β, γ sont situés respectivement sur A_1C_1 et A_1B_1, ce qui est évident, l'angle $B\gamma C$ par exemple étant droit (*Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1910, p. 256, question 2743).

Les triangles DEF et $I_aI_bI_c$ sont homothétiques; leur centre d'homothétie L_1 est l'intersection des droites I_aD, I_bE, I_cF. Le cercle O est évidemment celui des neuf points du triangle $I_aI_bI_c$ qui a pour orthocentre I; donc le centre O_1 du cercle circonscrit à $I_aI_bI_c$ est le symétrique de I par rapport à O. La droite IOO_1 est donc la droite d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$.

Les droites I_aD_a, I_bE_b, I_cF_c perpendiculaires aux côtés du triangle orthique ABC de $I_aI_bI_c$ passent par O_1. Le rayon du cercle $I_aI_bI_c$ est donc égal à $2R$; par suite le rapport de similitude des triangles DEF et $I_aI_bI_c$ est $\frac{r}{2R}$.

I et O_1 étant des points homologues de ces triangles, L_1 est situé sur IO_1 et l'on a

$$(1) \qquad \frac{L_1I}{L_1O_1} = \frac{r}{2R}.$$

Le centre I, l'orthocentre H_1 du triangle DEF et L_1 sont en ligne droite; autrement dit H_1 est sur la droite IOO_1 et, *dans un triangle* ABC, *l'orthocentre et par suite le centre de gravité du triangle* DEF *des contacts du cercle inscrit avec* BC, CA, AB, *sont*

situés sur la ligne des centres IO *des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC [1].

On a de plus

$$\frac{L_1H_1}{L_1I} = \frac{r}{2R},$$

et avec (1)

$$\overline{L_1I}^2 = L_1O_1 \times L_1H_1.$$

Donc, *si* I′ *est le symétrique de* I *par rapport à* L_1, *la distance* O_1H_1 *est divisée harmoniquement par les points* I *et* I′.

La droite d'Euler L_1IO_1 de $I_aI_bI_c$ contient les centres de gravité g et g' des triangles $I_aI_bI_c$ et DEF, et l'on a aussi

$$\frac{L_1g'}{L_1g} = \frac{r}{2R}.$$

Nous avons déduit du théorème précédent le suivant, fondamental dans l'étude du point φ de Feuerbach d'un triangle, rappelé du reste dans ce Journal, 1914, p. 110 : *les côtés du triangle* DEF *qui a pour sommets les points de contact du cercle inscrit et des côtés de* ABC, *sont tangents à la parabole dont le foyer est le point de Feuerbach* φ *et la directrice la ligne des centres* IO *des cercles inscrit et circonscrit à* ABC.

La hauteur DD′ du triangle DEF rencontre AA_2 en R, et la figure DRAI est un parallélogramme dans lequel $AR = ID = r$ et *les hauteurs* AA_2 et DD′, *par exemple, des triangles* ABC *et* DEF, *et la droite* A_1I *qui joint le milieu de* BC *au centre* I *du cercle inscrit, sont concourantes.*

---

[1] J. Neuberg, *Géométrie et Mécanique : Journal de G. de Longchamps*, 1888; *Journal de Vuibert*, 34e année, p. 78; V. Thébault, *Journal de Vuibert*, 1911, p. 2.

Ce point R est remarquable, en le joignant à l'extrémité D_1 du diamètre DI du cercle inscrit, *la droite* RD_1 *passe au point* φ *de Feuerbach du triangle* ABC. C'est la construction de φ donnée par Mannheim.

Calculons les distances x_1, y_1, z_1 de L_1 aux côtés du triangle ABC. On a, par exemple,

$$\frac{L_1 I}{L_1 O_1} = \frac{r}{2R} = \frac{r - x_1}{O_1 D_a - x_1},$$

d'où

$$x_1 = \frac{r r_a}{2R - r}, \qquad y_1 = \frac{r r_b}{2R - r}, \qquad z_1 = \frac{r r_c}{2R - r},$$

et

$$x_1 + y_1 + z_1 = \frac{r(4R + r)}{2R - r}.$$

De ces valeurs on déduit aussi les relations suivantes entre les aires L_1BC, L_1CA, L_1AB, désignées par s_a, s_b, s_c

$$\frac{s_a}{a \operatorname{tang} \frac{A}{2}} = \frac{s_b}{b \operatorname{tang} \frac{B}{2}} = \frac{s_c}{c \operatorname{tang} \frac{C}{2}} = \frac{S}{2(2R - r)},$$

S désignant l'aire ABC; ou encore

$$\frac{s_a}{a r_a} = \frac{s_b}{b r_b} = \frac{s_c}{c r_c} = \frac{r}{2(2R - r)}.$$

Les coordonnées normales de L_1 par rapport à ABC sont donc

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{C}{2}, \quad \text{ou} \quad r_a, \quad r_b, \quad r_c.$$

Les triangles DEF et MNP sont aussi homothétiques. Leur centre d'homothétie L_2 est également situé sur OI, et

$$\frac{L_2 I}{L_2 O} = \frac{r}{R}.$$

L_2 qui est extérieur au segment OI est le centre de similitude externe des cercles circonscrits aux triangles DEF et MNP, c'est-à-dire I et O. L'orthocentre H de ABC est le centre de similitude externe des cercles O et des neuf points de ABC.

Par conséquent, *la droite qui joint l'orthocentre d'un triangle* ABC *au centre d'homothétie des triangles* DEF *et* MNP *passe au point* φ *de Feuerbach du triangle* ABC. *D'ailleurs le conjugué harmonique* L'_2 *de* L_2 *par rapport à* O *et* I, *joint au centre de gravité* G de ABC, *donne une droite qui passe aussi en* φ.

Les droites L_2D, L_2E, L_2F, rencontrent le cercle circonscrit O en K_1, K_2, K_3. Les tangentes au cercle O en ces points rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB *en trois points de l'axe radical des cercles* O *et* I. D et K_1, par exemple, sont en effet antihomologues par rapport à ces cercles O et I.

Les distances x_2, y_2, z_2 de L_2 aux côtés du triangle ABC s'obtiennent comme celles de L_1 :

$$x_2 = \frac{r(R - OA_1)}{R - r}, \qquad y_2 = \frac{r(R - OB_1)}{R - r},$$

$$z_2 = \frac{r(R - OC_1)}{R - r};$$

d'où

$$x_2 + y_2 + z_2 = \frac{r(2R - r)}{R - r},$$

et en désignant par s_a, s_b, s_c les aires des triangles L_2BC, L_2CA, L_2AB

$$\frac{s_a}{a \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{s_b}{b \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{s_c}{c \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{Rr}{R - r};$$

de sorte que L_2 a pour coordonnées normales par rap-

port à ABC

$$\sin^2\frac{A}{2},\quad \sin^2\frac{B}{2},\quad \sin^2\frac{C}{2}.$$

2. Dans le cas d'un triangle ABC *rectangle en* A, l'orthocentre H_1 du triangle DEF est particulièrement curieux. En voici quelques propriétés élémentaires dont certaines sont d'ailleurs visibles au seul examen de la figure 1 :

1° *Les droites suivantes passent par l'orthocentre* H_1 *du triangle* DEF :

a. Les parallèles aux bissectrices intérieures des angles du triangle ABC, *menées des contacts* D, E, F.

b. La droite joignant le milieu de l'hypoténuse au centre du cercle inscrit; car le milieu de l'hypoténuse n'est autre que le centre du cercle circonscrit à ABC ; comme on sait d'ailleurs que :

Les droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle au centre du cercle inscrit découpent sur les hauteurs, à partir des sommets, des segments égaux au rayon r du cercle inscrit au triangle $AH_1 = r$.

c. La hauteur AA'.

Soient H_2 le point où OI rencontre AA' et K celui où AI coupe le cercle circonscrit au triangle. K est sur la perpendiculaire en O à BC, et

$$KI = KB = KC = R\sqrt{2}.$$

Les triangles semblables A_1H_2I et KOI donnent

$$AH_2\sqrt{2} = AI = r\sqrt{2},$$

et H_2 n'est autre que H_1 orthocentre du triangle DEF.

d. Les droites qui joignent les contacts D_b *et* E_b,

D_c *et* F_c *des cercles exinscrits* I_b *et* I_c *avec l'hypoténuse et les côtés* CA *et* AB; en effet, dans le triangle rectangle, les contacts D_b, E_b, F sont en ligne droite [1], et comme $CD_b = CE_b = r$, D_bE_b est parallèle à CI et D_bE_bF n'est autre que l'une des droites de a. On en peut conclure, puisque $CE_b = r$, que CA, FH_1 et C_1I sont concourantes ainsi que AB, EH_1 et B_1I.

On a aussi l'égalité des triangles I_cBF_c et BID, d'où

$$r_c = p - b, \qquad r_b = p - c,$$

et la démonstration particulièrement simple de cette propriété :

Dans un triangle rectangle les rayons des cercles inscrit et exinscrits égalent respectivement $p - a$, $p - b$, $p - c$, p *et la somme des rayons des cercles exinscrits dans les angles aigus égale l'hypoténuse.*

e. La droite qui joint les pieds B′ *et* C′ *des bissectrices intérieures des angles aigus.*

B′C′ est en effet le lieu des points du plan du triangle ABC dont la somme des distances à AB et à CA égale la distance à BC, les distances algébriques étant comptées positivement pour les points intérieurs au triangle. Il est aisé de montrer que le point H_1 a bien cette propriété. Ses distances aux côtés sont H_1A', H_1R, H_1S. Or

$$H_1A' = AA' - r,$$

$$H_1R + H_1S = (A'P + A'Q)\frac{r}{AA'} = (AB + CA)\frac{r}{a};$$

donc

$$H_1R + H_1S - H_1A' = (b + c)\frac{r}{a} + r - AA' = 0;$$

---

[1] *Mathesis*, 1913, p. 107.

et *l'orthocentre* H_1 *du triangle* DEF *est tel que sa distance à l'hypoténuse égale la somme de ses distances aux côtés de l'angle droit.*

f. La droite de Mannheim $D_1\varphi$ *du triangle* ABC (puisque $AH_1 = r$) et *dans un triangle rectangle le point* φ *de Feuerbach est l'intersection avec le cercle inscrit de la droite qui joint le milieu du côté* EF *à l'orthocentre* H_1 *du triangle* DEF.

2° La hauteur AA′ du triangle ABC détermine deux triangles rectangles ABA′ et AA′C; soient ω_1 et ω_2 les centres de leurs cercles inscrits et ρ_1, ρ_2 leurs rayons, O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle $A\omega_1\omega_2$, D_1, D_2 les contacts de ω_1 et ω_2 sur BC. Les triangles ABA′ et AA′C sont directement semblables et l'on peut les rendre homothétiques en faisant tourner l'un d'eux autour de A′ d'un angle droit. Il en résulte que le triangle $A\omega_1\omega_2$ est directement semblable à chacun d'eux. Les triangles ABC, ABA′, AA′C sont semblables et les rayons r, ρ_1 et ρ_2 sont des lignes homologues; par suite

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{AB}{BC}, \qquad \frac{\rho_2}{r} = \frac{AC}{BC},$$

et l'on a

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = r^2.$$

Alors

$$\omega_1 A' = \rho_1\sqrt{2}, \qquad \omega_2 A' = \rho_2\sqrt{2},$$

et

$$\omega_1\omega_2 = r\sqrt{2}.$$

Comme

$$\widehat{\omega_1 A \omega_2} = 45^\circ,$$
$$O_2\omega_1 = O_2 A = O_2\omega_2 = r,$$

et *le rayon du cercle* $A\omega_1\omega_2$ *égale celui du cercle inscrit à* ABC.

I est d'ailleurs l'orthocentre du triangle $A\omega_1\omega_2$ et comme

$$\text{angle } IA\omega_2 = \frac{C}{2} = A'A\omega_1,$$

AA′ est isogonale de AI et contient O_2. Puisque le rayon du cercle O_2 est r, O_2 *est l'orthocentre* H_1 *du triangle* DEF, ou encore, *dans un triangle rectangle les centres des cercles circonscrits à* ABC, DEF *et* $A\omega_1\omega_2$ *sont en ligne droite.*

3° *La droite* K_1K_2 *qui joint les intersections des bissectrices* CI *et* BI *avec le cercle* $A\omega_1\omega_2$, *passe en* H_1 ; cette droite est un diamètre parallèle à l'hypoténuse.

4° *On a la relation*

$$\frac{IH_1}{OI} = \frac{r}{R},$$

d'où

$$\frac{a}{b+c} = \frac{R}{R+r}.$$

5° D'après le 2°, H_1 *est le sommet d'un carré* $H_1\omega_1D\omega_2$ *de côté* r.

Aux précédentes relations on peut donc ajouter

$$\overline{DD_1}^2 + \overline{DD_2}^2 = r^2, \qquad \overline{H_1D}^2 = 2r^2,$$
$$H_1A' = \rho_1 + \rho_2, \qquad AA' = r + \rho_1 + \rho_2.$$

Cette dernière relation n'est qu'un cas particulier de la suivante dans un triangle quelconque

$$AA' = \rho_1 + \rho_2 + p\left(1 - \frac{2r}{AA'}\right).$$

6° *L'hexagone* $AF\omega_1D\omega_2E$ *a ses côtés égaux à* r *et parallèles deux à deux. Les triangles* DEF *et* $A\omega_1\omega_2$ *sont égaux et leurs centres de gravité* G_1

et G_2 *sont situés sur* IH_1 *de telle façon que*

$$IG_2 = G_2G_1 = G_1H_1 = \frac{1}{3} IH_1,$$

car IH_1 est la droite d'Euler commune aux deux triangles DEF et $A\omega_1\omega_2$.

7° *Les bissectrices* CI *et* BI *passent chacune à l'intersection de* DF *et* $A\omega_1$, DE *et* $A\omega_2$.

DF et DE contiennent, en effet, les projections m et n de A sur CI et BI. m et n étant milieux de AM et AN, *les pieds des hauteurs* EH_1 *et* FH_1 *du triangle* DEF *sont sur* B_1C_1.

8° Enfin, en remarquant que H_1 est le point de concours de deux diagonales du quadrilatère complet formé par B_1C_1 et les côtés de DEF, on a ce résultat :

Le point φ *de Feuerbach d'un triangle rectangle est la projection orthogonale de l'orthocentre* H_1 *du triangle* DEF *sur la droite d'Hamilton relative au contact* D *du cercle inscrit avec l'hypoténuse.*

3. Le concours d'Agrégation des Sciences mathématiques en 1873 comportait la question suivante :

On considère les cercles exinscrits à un triangle ABC *et l'on joint les points de contact de ces cercles avec les deux côtés qui ont été prolongés; on forme ainsi un nouveau triangle* A'B'C'. *On demande :* 1° *d'évaluer les angles du triangle* A'B'C'; 2° *de démontrer que les droites* AA', BB', CC' *sont les hauteurs du triangle* ABC; 3° *de déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle* A'B'C'.

Une solution trigonométrique de cette question, due

à M. Gambey, a paru dans les *Nouvelles Annales*, janvier 1874, p. 43.

M. Neuberg a repris ce sujet en 1874 (*Nouvelle Correspondance mathématique*, p. 44-47), par une solution géométrique accompagnée d'intéressantes propriétés qu'il a d'ailleurs réunies pour la plupart dans la question 51 du *Traité de Géométrie* de Rouché et de Comberousse (*Exercices sur la Géométrie du triangle*, p. 513 de la septième édition, 1900) :

On considère les cercles exinscrits à un triangle ABC *et l'on joint les points de contact de ces cercles avec les deux côtés qui ont été prolongés; on forme ainsi un nouveau triangle* A'B'C'. *Soient* O, I, I_a, I_b, I_c *les centres et* R, r, r_a, r_b, r_c *les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits à* ABC. *Démontrer que :* 1° *les côtés des triangles* A'B'C' *et* $I_aI_bI_c$ *se coupent deux à deux aux pieds des hauteurs des triangles* I_aBC, I_bCA *et* I_cAB; 2° *les droites* AA', BB', CC' *sont les hauteurs de* ABC *et leur point de concours* H *est le centre du cercle circonscrit à* A'B'C'; 3° $AA' = r_a$, $BB' = r_b$, $CC' = r_c$, $HA' = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}$; 4° *les droites* $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ *sont les symédianes des deux triangles* A'B'C' *et* $I_aI_bI_c$.

La question 1967 *bis* de *Mathesis* est en quelque sorte une réciproque des deux questions ci-dessus. Nous allons maintenant l'étudier directement en indiquant d'autres propriétés curieuses de la figure [1].

---

[1] Le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* a donné en 1909, page 267, la réciproque des 2° et 3° de la question 51 de M. Neuberg. Nous avons alors montré, page 268, que les côtés de A'B'C' sont les cordes des contacts des cercles exinscrits avec les côtés du triangle.

1° Les points A′, B′, C′ sont extérieurs au triangle ABC. La bissectrice AI_a coupe le cercle O au milieu M de H_a et $A_1M = \frac{1}{2}(r_a - r)$; comme

$$A_1M = OM - OA_1 = R - \frac{HA}{2},$$

$$HA + r_a = HA' = 2R + r.$$

Pareillement,

$$HB' = HC' = 2R + r = HA'.$$

Le triangle A′B′C′ *est donc inscrit dans un cercle de rayon* $2R + r$ *dont le centre est l'orthocentre* H *du triangle* ABC.

2° Les droites HA′, HB′, HC′ étant égales entre elles et respectivement parallèles aux droites égales ID, IE, IF, mais de sens contraire, le triangle A′B′C′ est inversement homothétique aux triangles DEF et $I_aI_bI_c$. On en conclut que les angles du triangle A′B′C′ sont respectivement

$$A' = 90^\circ - \frac{A}{2}, \qquad B' = 90^\circ - \frac{B}{2}, \qquad C' = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Ceci permet de calculer les éléments du triangle. Ainsi les côtés et la surface ont pour valeurs

$$B'C' = 2(2R + r)\cos\frac{A}{2}, \qquad C'A' = 2(2R + r)\cos\frac{B}{2},$$

$$A'B' = 2(2R + r)\cos\frac{C}{2},$$

$$S = 2(2R + r)^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Les rayons des cercles circonscrits aux triangles A′B′C′, DEF et $I_aI_bI_c$ étant $2R + r$, r, $2R$, on a cette propriété remarquable :

Toute droite du triangle A'B'C' *égale la somme des droites homologues dans les triangles* DEF *et* $I_aI_bI_c$.

Ainsi *les côtés du triangle* A'B'C' *égalent respectivement la somme des côtés homologues dans les triangles* DEF *et* $I_aI_bI_c$.

Nous tirerons tout à l'heure d'autre parti de cette proposition.

3° Soient Q, Q' les points de rencontre de B'C' avec AB et une parallèle menée par B à AC. B'C' étant perpendiculaire à AH_a,

$$\text{angle } BQC' = 90^\circ - \frac{A}{2}, \qquad \text{angle } BB'Q = \frac{A}{2};$$

d'où

$$\text{angle } BQQ' = \text{angle } BQ'Q, \qquad \text{et} \qquad BQ = BQ'.$$

Mais les triangles BB'Q' et E_bI_bA sont égaux, puisque

$$BB' = I_bE_b \qquad \text{et} \qquad \text{angle } Q' = \text{angle } E_bAI_b.$$

Il en résulte que

$$BQ' = BQ = AE_b = p - C,$$

et Q n'est autre que le contact F_a du cercle exinscrit I_a.

En d'autres termes *les côtés du triangle* A'B'C' *sont les cordes* E_aF_a, D_bF_b, E_cD_c *des contacts des cercles exinscrits dans les angles du triangle* ABC, ou encore *les polaires des sommets* A, B, C *par rapport aux cercles exinscrits* I_a, I_b, I_c.

De façon tout analogue à notre démonstration relative au triangle DEF, on obtient le 2° de la question de M. Neuberg :

Les côtés du triangle A'B'C' *contiennent les pieds de deux des hauteurs des triangles* I_aBC, I_bCA *et*

I_cAB, *c'est-à-dire les intersections des côtés des triangles* $A'B'C'$ et $I_aI_bI_c$.

Soient X_a, Y_a, X_b, Y_b, X_c, Y_c ces points; ils sont aussi situés, comme β et γ, sur les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ et l'on a, par exemple,

$$X_a\gamma = BC = Y_a\beta.$$

De plus chacun des côtés de $A_1B_1C_1$ contient deux points tels que X_a et deux tels que γ; ces quatre points sont alignés de façon que leurs distances respectives deux à deux sont p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, a, b, c, p étant les éléments du triangle ABC. Ainsi sur A_1B_1 sont placés X_a sur BI_a, δ sur CI, γ sur BI et Y_b sur AI_b, et

$$X_a\delta = p-b, \qquad \delta\gamma = p-c,$$
$$\gamma Y_b = p-a, \qquad X_aY_b = p.$$

Les trois droites X_aY_b, Y_aX_c, X_bY_c, étant égales et X_a, Y_a, X_b, X_b, X_c, Y_c étant les pieds des perpendiculaires, issues des sommets du triangle orthique ABC de $I_aI_bI_c$, sur les côtés de ce triangle, *ces six points, intersections des côtés des triangles* $A'B'C'$ *et* $I_aI_bI_c$, *sont situés sur le cercle de Taylor du triangle* $I_aI_bI_c$. *Ce cercle est orthogonal aux cercles exinscrits* $I_aI_bI_c$.

Nous avons donné cette propriété des six points précédents, considérés comme intersections des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ avec les cercles décrits sur BC, CA, AB comme diamètres (*Bulletin de mathématiques élémentaires*, 1909, p. 248, question 2422).

Le centre Ω du cercle de Taylor de $I_aI_bI_c$ est le centre du cercle inscrit au triangle $A_1B_1C_1$, c'est-à-dire le centre de gravité du périmètre du triangle ABC. Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ étant homothétiques, le

centre étant le centre de gravité G commun à ces triangles et le rapport $\frac{1}{2}$, les droites HI et $O\Omega$, qui joignent les orthocentres aux centres des cercles inscrits, sont parallèles et $O\Omega = \frac{1}{2}$ HI.

Nous avons vu que $OO_1 = IO$, donc Ω *est le milieu de* O_1H.

4° La droite $A'I_a$, qui joint deux sommets homologues des triangles $A'B'C$ et $I_aI_bI_c$, rencontre BC en un point S tel que

$$\frac{A'S}{SD_a} = \frac{h_a - r_a}{r_a} = \frac{b - c}{a} = \frac{A_2A_1}{A_1D_a},$$

c'est-à-dire au milieu A_1 de BC. De même $B'I_b$ et $C'I_c$ passent respectivement en B_1 et C_1. $A'I_a$, $B'I_b$ et $C'I_c$ se coupent au centre K de similitude des triangles $A'B'C'$ et $I_aI_bI_c$.

Par suite, ABC *étant le triangle orthique de* $I_aI_bI_c$, *les droites* $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ *qui passent aux milieux de* BC, CA, AB *sont les symédianes du triangle* $I_aI_bI_c$. *Leur point d'intersection* K, *centre de similitude des triangles* $A'B'C'$ *et* $I_aI_bI_c$, *est donc le point de Lemoine de ces deux triangles.*

C'est le 4° de la question de M. Neuberg dont l'auteur a donné aussi une solution très simple, Article cité précédemment.

Cette propriété remarquable nous a donné les suivantes :

La droite qui joint les centres des cercles circonscrits aux triangles $A'B'C'$ *et* $I_aI_bI_c$ *passe au point de Lemoine commun de ces triangles ainsi que par les centres des cercles de Taylor relatifs à ces triangles.*

Plus généralement : *dans un triangle le centre du*

cercle circonscrit, le point de Lemoine, l'orthocentre du triangle orthique et le centre de gravité du périmètre de ce dernier triangle, sont quatre points en ligne droite.

Ce théorème doit être rapproché de celui donné au paragraphe 1 et relatif à l'orthocentre H_1 de DEF.

On en déduit cet autre, comparable aussi à celui que nous avons donné relativement au point de Feuerbach :

Le triangle médian $A_1B_1C_1$ *et le triangle orthique* $A_2B_2C_2$ *relatifs à un triangle* ABC *sont circonscrits à une même parabole ayant pour foyer le point de Steiner et pour directrice la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle* ABC.

5° Soit H_2 l'orthocentre de $A'B'C'$. H étant le centre du cercle circonscrit à ce triangle, HH_2 est la droite d'Euler de $A'B'C'$, laquelle est par suite parallèle à la droite d'Euler IO_1 de $I_aI_bI_c$, et *la droite d'Euler du triangle* $A'B'C'$ *est parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC.

6° D'après la propriété donnée au 2°,

$$H_1I + IO_1 = HH_2,$$

car H_1I, IO_1 et HH_2 sont respectivement les droites d'Euler de DEF, $I_aI_bI_c$, $A'B'C'$, limitées en des points homologues. *Le quadrilatère* $HH_1O_1H_2$ *est donc un parallélogramme.*

Soit L_1 le centre d'homothétie des triangles $A'B'C'$ et DEF. Ce point est situé à l'intersection des droites H_1H_2 et HI.

Nous avons vu que le centre de gravité du périmètre du triangle ABC est le milieu Ω de HO_1. Comme

$HH_1O_1H_2$ est un parallélogramme, H_1H_2 passe en Ω.

D'où cette propriété de L_3 :

Le centre d'homothétie L_3 *des triangles* $A'B'C'$ *et* DEF, *les orthocentres* H_2 *et* H_1 *de ces triangles et le centre de gravité* Ω *du périmètre du triangle* ABC *sont quatre points en ligne droite.*

Les distances x_3, y_3, z_3 de L_3 aux côtés de ABC peuvent s'exprimer

$$x_3 = \frac{r(2R + r + HA')}{2(R + r)}; \qquad y_3 = \frac{r(2R + r + HB')}{2(R + r)};$$

$$z_3 = \frac{r(2R + r + HC')}{2(R + r)}.$$

7° *Les droites* $A'D_a$, $B'E_b$, $C'F_c$ *parallèles à* AI, BI, CI, *sont les hauteurs du triangle* $A'B'C'$.

En effet AA' et D_aI_a, par exemple, sont des droites équipollentes. Le rayon OA rencontre en M la hauteur $A'D_a$, et comme

$$\text{angle } AA'M = \frac{1}{2}\left(C - \hat{B}\right) = \text{angle } OAI_a = \text{angle } AMA',$$

les hauteurs du triangle $A'B'C'$ *découpent, sur les rayons* OA, OB, OC *de* ABC, *respectivement trois segments*

$$OM = r_a, \qquad ON = r_b, \qquad OP = r_c;$$

ou *les symétriques des sommets* A', B', C' *par rapport à* I_bI_c, I_aI_c *et* I_aI_b *sont situés sur les rayons* OA, OB, OC.

Soit X l'intersection de OA et de I_aD_a. Le triangle MD_aX est isoscèle et l'on trouve

$$OX + XO_1 = R.$$

En supposant fixes les cercles O et I, ABC étant variable tout en restant inscrit à O et circonscrit à I, O_1 est fixe, et *le lieu des points* X, Y, Z, *d'intersections des rayons* OA, OB, OC *avec* I_aD_a, I_bE_b, I_cF_c *respectivement, est une ellipse de foyers* O *et* O_1.

4. Le triangle $I_aI_bI_c$ est très connu et beaucoup de ses propriétés sont classiques. Nous signalerons cependant les deux suivantes :

a. M. Neuberg a donné dans *Mathesis*, 1882, p. 111, ce théorème : *La droite qui joint les pieds* α', β', γ' *des bissectrices extérieures d'un triangle* ABC *est perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit*, dont voici une démonstration bien simple.

D'après ce qui précède, α', β', γ' sont les intersections des côtés du triangle $I_aI_bI_c$ avec les côtés de son triangle orthique ABC. Or on sait que ces côtés se coupent deux à deux en trois points de l'axe radical des cercles circonscrit O_1 et des neuf points de $I_aI_bI_c$.

Mais OO_1 n'est autre que la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit à ABC.

b. Considérons sur les hauteurs AI_a, BI_b, CI_c du triangle $I_aI_bI_c$ les trois points $\omega_a, \omega_b, \omega_c$, symétriques de l'orthocentre I par rapport aux milieux des hauteurs. Ces points sont remarquables.

Les cercles ω_a, ω_b, ω_c tangents respectivement à CA et AB, AB et BC, BC et CA, ont pour rayons

$$\rho_a = r_a - r = 4R\sin^2\frac{A}{2}; \qquad \rho_b = r_b - r = 4R\sin^2\frac{B}{2};$$

$$\rho_c = r_c - r = 4R\sin^2\frac{C}{2},$$

car si la parallèle $I\mu$ à BC, par exemple, rencontre I_cF_c

en μ et si N est le contact du cercle ω_c avec BC, les triangles égaux $H_c\mu$ et $CN\omega_c$ donnent

$$\omega_c N = H_c\mu = r_c - r.$$

Les cercles ω_a, ω_b, ω_c touchent donc les côtés du triangle ABC en P et P_1, Q et Q_1, N et N_1, tels que

$$NC = CN_1 = c; \qquad AP = P_1A = a; \qquad QB = BQ_1 = b$$

et

$$BP = BN = a - c; \qquad Q_1C = P_1C = a - b;$$
$$N_1A = QA = b - c.$$

A, B, C sont donc des points des axes radicaux des cercles ω_b et ω_c, ω_a et ω_c, ω_a et ω_b.

D_a, D_b, D_c étant respectivement milieux des segments NQ_1, P_1N_1, QP, sont aussi de même puissance par rapport aux couples de cercles précédents dont les axes radicaux sont par suite AD_a, BD_b, CD_c et le centre radical le point de Nagel n du triangle ABC.

Les droites PN, N_1Q et P_1Q_1 passent, comme l'on sait, au point de Nagel de ABC et l'on a par exemple, deux triangles homothétiques QnN et $E_cF_cD_c$, ce qui montre que le cercle ω_c passe en n. Il en est de même des cercles ω_a, ω_b et *les trois cercles* ω_a, ω_b, ω_c *se coupent au point Nagel du triangle* ABC.

Les distances α, β, γ du point de Nagel aux côtés de ABC étant respectivement

$$\alpha = 2r \times \frac{p-a}{a} = \frac{r^2}{2R}\sin^2\frac{A}{2};$$

$$\beta = 2r \times \frac{p-b}{b} = \frac{r^2}{2R}\sin^2\frac{B}{2};$$

$$\gamma = 2r \times \frac{p-c}{c} = \frac{r^2}{2R}\sin^2\frac{C}{2};$$

on a

$$2\rho_a\alpha = 2\rho_b\beta = 2\rho_c\gamma = 4r^2.$$

et *les cercles* ω_a, ω_b, ω_c *sont respectivement inverses des côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC, *le point* n *de Nagel étant le centre d'inversion et la puissance* $4r^2$.

Considérons alors le diamètre nn' de ω_c, par exemple, perpendiculaire sur AB en T et les points γ_1 et γ_2 d'intersection de AB avec ω_c. Dans le triangle rectangle $n\gamma n'$,

$$4r^2 = 2\gamma\rho_c = n\mathrm{T} \times \mathrm{T}n' = \overline{n\gamma_1}^2 = \overline{n\gamma_2}^2.$$

De même on a

$$2r = n\gamma_1 = n\gamma_2 = n\alpha_1 = n\alpha_2 = n\beta_1 = n\beta_2,$$

α_1, α_2, β_1, β_2 étant analogues à γ_1 et γ_2 sur BC et CA, et *les cercles* ω_a, ω_b, ω_c *coupent en général les côtés du triangle* ABC *en six points concycliques* α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. *Le centre du cercle est le point de Nagel du triangle* ABC *et le rayon, le diamètre du cercle inscrit à ce triangle.*

La condition nécessaire et suffisante pour que les six points du cercle existent est, par exemple,

$$2\rho_a \geqq \alpha,$$

soit

$$r_a - r \geqq r \times \frac{p-a}{a}$$

ou

$$3a \leqq b + c.$$

Dans le cas de l'égalité, deux points sont confondus et le cercle précédent touche l'un des côtés du triangle. On obtient ainsi une propriété nouvelle de ce triangle, *dans lequel un côté est le tiers de la somme des deux autres*, que nous avons signalé dans *Mathesis*, juillet-août 1914, p. 181.

[M¹8a]

NOTE SUR LA CARDIOÏDE;

PAR M. F. BALITRAND.

La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un cercle fixe de rayon égal. On en déduit immédiatement, comme nous allons le montrer, qu'elle est aussi la podaire et la conchoïde du cercle fixe par rapport à un point de sa circonférence.

Désignons, à cet effet, par O et O_1 les centres de deux cercles, par a leur rayon commun, par M leur point de contact actuel, par AA_1 un diamètre fixe du cercle fixe. Prenons sur le cercle mobile un point P tel que

$$\text{arc}\,MP = \text{arc}\,MA;$$

le lieu du point P, quand M varie sur le cercle fixe, est par définition une cardioïde ayant un point de rebroussement en A.

La tangente commune en M aux deux cercles est perpendiculaire sur AP et passe par son milieu T. Le lieu de T, podaire du cercle fixe par rapport au point A, est une cardioïde, puisqu'il est homothétique du lieu du point P.

Soit A' le second point d'intersection de AP avec le cercle fixe. Abaissons de O la perpendiculaire OT' sur AA'. On a $TT' = a$ et par suite $A'P = 2a$. Le lieu du point P est donc une conchoïde du cercle fixe par rapport au point A.

Le point M étant le centre instantané de rotation, la

droite PM est la normale en P à la cardioïde. Soit P′ son second point d'intersection avec le cercle fixe. MP′ est égal à MP et par suite à MA. Le triangle PAP′ est rectangle en A et M est le milieu de son hypoténuse. De plus, AP′ est perpendiculaire à OM, c'est-à-dire parallèle à MT et les points A′ et P′ sont diamétralement opposés sur le cercle fixe.

On peut déduire de là plusieurs modes de génération de la cardioïde. Nous nous contenterons d'indiquer le suivant qui fournit à la fois un point de la courbe et la normale en ce point :

De chaque point M *d'un cercle fixe comme centre, on décrit un cercle passant par un point fixe* A *du premier et le coupant en un second point* P′. *La droite* P′M *rencontre le cercle variable en un autre point* P. *Le lieu de* P *est une cardioïde et la droite* PM *est la normale en* P *à la courbe.*

Prenons sur AA′, à partir de A′ et dans le sens AA′, une longueur égale à $2a$. Nous obtenons ainsi un point Q appartenant à la cardioïde. La construction connue de la normale à la conchoïde nous montre que la normale en Q est la droite QP′. On a d'ailleurs

$$A'P = A'Q = A'P' = 2a.$$

L'angle PP′Q est donc droit et les normales en P et Q sont rectangulaires. Il en est par suite de même des tangentes en ces points, et celles-ci se coupent en un point R qui complète le rectangle PP′QR.

La droite P′A′, qui passe par le milieu de la diagonale PQ, est aussi une diagonale. Il en résulte qu'elle passe en R et qu'on a $OR = 3a$. Le lieu de ce dernier point est donc un cercle concentrique au cercle fixe et

de rayon triple. Ce qui précède peut se résumer comme il suit :

Si, d'un point d'un cercle concentrique au cercle fixe et de rayon triple, on mène les tangentes à la cardioïde, deux de ces tangentes sont rectangulaires.

La distance des points de contact est constante et égale à $4a$.

La droite qui joint les points de contact passe par un point fixe qui est le point de rebroussement de la cardioïde.

Le milieu de cette droite décrit le cercle fixe.

Le point de rencontre des normales, aux points de contact des tangentes, décrit le cercle fixe.

Le segment PQ étant de grandeur constante, son déplacement peut être obtenu par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.

La première, qui est le lieu du centre instantané de rotation dans le plan mobile, se confond avec le cercle décrit sur PQ comme diamètre, puisque l'angle PP′Q est constamment droit. La seconde, lieu du centre instantané dans le plan fixe, coïncide ici avec le lieu du point P′, c'est-à-dire avec le cercle fixe. Le déplacement de PQ est donc réalisé par le roulement intérieur d'un cercle de rayon $2a$ sur un cercle de rayon a.

On sait que, dans le roulement intérieur d'un cercle sur un cercle de rayon double, un point quelconque de sa circonférence décrit un diamètre du cercle fixe (théorème de Cardan).

Ici, c'est le mouvement inverse qui a lieu, c'est-à-dire le mouvement que paraît avoir le cercle fixe pour un spectateur invariablement lié au cercle mobile. Mais le point décrivant et le diamètre décrit sont

toujours *réunis de situation* et par suite un diamètre quelconque du cercle mobile passe par un point fixe; tandis que ses deux extrémités engendrent une seule et même cardioïde admettant le point fixe pour point de rebroussement.

Lorsqu'un plan mobile se déplace sur un plan fixe, les centres de courbure de toutes les courbes enveloppées par les droites du plan mobile sont sur un cercle, dit *cercle des rebroussements*, qui passe au centre instantané de rotation et y touche les deux courbes, fixe et mobile. Ici, ce cercle, qui contient nécessairement le point A, se confond avec le cercle fixe.

Le cercle des inflexions est le symétrique du précédent par rapport à la tangente commune aux deux courbes, au centre instantané de rotation, c'est-à-dire par rapport à la tangente en P′ au cercle fixe. Sa connaissance entraîne celle des centres de courbure de la cardioïde en P et Q.

En effet, si l'on désigne par P_1 et Q_1 les intersections des normales PP′ et QP′ avec le cercle des inflexions, par p et q les centres de courbure correspondants, on a les relations

$$Pp = \frac{PP'^2}{PP_1} = \frac{2}{3}\,PP' = \frac{4}{3}\,PM,$$

$$Qq = \frac{QP'^2}{QP_1} = \frac{2}{3}\,QP' = \frac{4}{3}\,QM'.$$

Il résulte de ces égalités que les points p et q sont sur une parallèle à PQ et que le segment pq est le tiers de PQ. Ainsi :

Le rayon de courbure en un point d'une cardioïde est égal aux $\frac{4}{3}$ *du segment de normale com-*

pris entre le point d'incidence et le point correspondant du cercle fixe.

Les centres de courbure correspondant à deux points de la courbe où les tangentes sont rectangulaires sont sur une parallèle à la droite qui joint les points de contact et leur distance est égale au tiers de la distance des points de contact.

Le segment pq étant de grandeur constante peut, à son tour, être considéré comme entraîné dans le déplacement d'une courbe mobile sur une courbe fixe. On démontrerait, comme nous venons de le faire, que, ici, la courbe mobile est le cercle décrit sur pq comme diamètre, puisque l'angle $pP'q$ est droit, et que la courbe fixe est le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{3}$.

Les points p et q décrivent donc une cardioïde et l'ón voit sans peine que son point de rebroussement est situé sur le diamètre AA_1, du même côté que A_1, et à une distance de O égale à $\frac{a}{3}$. De là il résulte que :

La développée d'une cardioïde est une autre cardioïde, homothétique inverse de la proposée, le centre d'homothétie étant le centre du cercle fixe et le rapport d'homothétie $\frac{1}{3}$.

Les deux triangles MOA, MOP′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux. Les angles OMA, OMP′ sont égaux et si AM est un rayon lumineux, MP′ est le rayon réfléchi.

La caustique par réflexion d'un cercle, le point lumineux étant un point de sa circonférence, est donc une cardioïde.

Les arcs de cercle P′M et MA sont égaux; donc l'arc P′MA est double de l'arc MA. On démontrerait, comme nous l'avons fait dans la Note sur la *Néphroïde de Proctor*, que, dans ces conditions, la droite P′M enveloppe une courbe qu'elle touche en un point p, déterminé par l'égalité $Mp = \frac{1}{3} MP'$. Si l'on trace ensuite le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{3}$, qui coupe OM en ω, et le cercle, également de rayon $\frac{a}{3}$, décrit sur ωM comme diamètre, cercle qui passe en p, on prouverait, toujours comme dans la Note précitée, que le lieu du point p n'est autre que celui décrit par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un cercle fixe de rayon égal. Ainsi :

Si deux mobiles, partant d'un même point, se meuvent sur un cercle, dans le même sens, avec des vitesses dans le rapport de 2 à 1, la droite qui les joint enveloppe une cardioïde.

L'arc de cercle P′MA étant double de l'arc MA, si l'on ajoute au premier 2π et au second π, on obtient encore deux arcs de cercle dans le rapport de 2 à 1. Or, par cette opération, on tombe évidemment sur les points P′ et M′, ce dernier étant diamétralement opposé au point M. La droite P′M′ est donc une tangente de la cardioïde. Pour trouver la troisième tangente à cette courbe, issue de P′, il suffit de prendre sur le cercle un point P″ tel que arc P′P″ = arc P′A. Mais alors le triangle AP′P″ est isoscèle et la droite OP′ est perpendiculaire sur AP″; autrement dit, elle est parallèle à A_1P'', puisque l'angle $A_1P''A$ est droit. D'où ce mode de génération de la cardioïde :

Soient A *un point fixe et* P′ *un point variable*

d'un cercle. Menons le diamètre M'OM *du cercle perpendiculaire à* P'A. *Les droites* P'M *et* P'M' *enveloppent une cardioïde. La troisième tangente à cette courbe, issue de* P', *s'obtient en menant* A_1P'' *parallèle à* OP' (A_1 *diamétralement opposé à* A) *et joignant* P'P''.

L'angle $P'A_1A$, qui a pour mesure la moitié de l'arc P'MA, est égal à l'angle MOA, qui a pour mesure l'arc MA. D'où ce nouveau mode de génération, qui ne diffère pas au fond du précédent :

Par un point fixe d'un cercle, et par son centre, on mène deux segments variables, parallèles et de même sens; la droite, qui joint leurs points de rencontre avec le cercle, enveloppe une cardioïde.

Passons maintenant à la rectification et à la quadrature de la cardioïde.

Si l'on désigne par ε l'angle de contingence commun des deux cercles au point M, par $d\sigma$ l'élément d'arc de la courbe, on a

$$d\sigma = MP \times 2\varepsilon.$$

Appelons φ l'angle MOA ; on a

$$\varepsilon = d\varphi, \qquad MP = MA = 2a \sin\frac{\varphi}{2};$$

par suite,

$$d\sigma = 8a \sin\frac{\varphi}{2} \times \frac{d\varphi}{2},$$

$$\sigma = 8a\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Mais la flèche de l'arc de cercle MA (ou MP) est égale à $a - a\cos\frac{\varphi}{2}$. Donc :

L'arc de cardioïde, compté à partir du point de

rebroussement, est égal à huit fois la flèche de l'arc correspondant du cercle générateur.

La longueur totale de la cardioïde est égale à huit fois le diamètre du cercle générateur.

On peut encore énoncer la proposition suivante :

La longueur de l'arc de cardioïde, compris entre le point de rebroussement et le sommet de la courbe, est double de la corde qui le sous-tend.

Pour trouver l'aire de la courbe, nous considérerons le quadrilatère infinitésimal limité par l'arc infiniment petit du cercle fixe, par l'arc correspondant de la cardioïde et par les deux droites qui joignent les extrémités de ces arcs.

Ce quadrilatère se divise à son tour en deux secteurs. Le premier a pour sommet le point décrivant P, et pour base l'élément du cercle mobile. Il a pour expression $\frac{1}{2}\overline{PM}^2\,d\omega$, ω désignant l'angle polaire, c'est-à-dire l'angle du rayon vecteur PM avec la tangente en P au cercle mobile. Pour un déplacement fini de ce dernier, la somme de ces secteurs élémentaires est égale au secteur du cercle mobile dont la corde est PM.

Le second a pour sommet le point M et pour base l'élément de la cardioïde. Son expression est

$$\frac{1}{2}\,MP \times d\sigma = 4a^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2a^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi.$$

La somme de ces éléments est égale à

$$2a^2(\varphi - \sin\varphi);$$

soit quatre fois la surface du secteur correspondant du cercle mobile, ou du cercle fixe; car les deux secteurs sont égaux. Ainsi :

Le secteur curviligne limité par un arc de cardioïde, compté à partir du point de rebroussement, et les arcs correspondants des cercles fixe et mobile, est égal à quatre fois le secteur correspondant du cercle mobile (ou du cercle fixe).

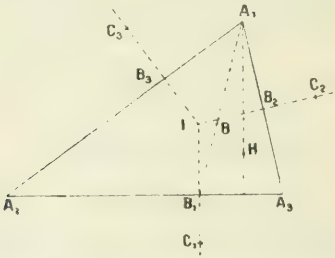
On peut dire aussi que la surface limitée par l'arc de cardioïde AP et les deux droites MA, MP, est égale à six fois la surface du secteur du cercle mobile dont la corde est MP, ou celle du secteur du cercle fixe de corde MA. De plus, *l'aire totale de la cardioïde est égale à six fois l'aire du cercle générateur.*

[K¹2d]

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KARIYA;

PAR M. AURIC.

Le théorème de Kariya s'énonce comme il suit : *Dans un triangle $A_1A_2A_3$ abaissons du centre du*



cercle inscrit I les perpendiculaires IB_1, IB_2, IB_3 sur les côtés et, sur ces perpendiculaires, prenons des

longueurs égales $IC_1 = IC_2 = IC_3$. *Les droites* A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 *concourent en un point* C *dont le lieu est une conique circonscrite à* $A_1A_2A_3$.

Lorsque C_1 vient en B_1, C_2 en B_2, C_3 en B_3, le point de concours B est le point de Gergonne.

Lorsque C_1, C_2, C_3 s'éloignent à l'infini, le point de concours H est l'orthocentre.

On peut démontrer facilement que I, B, H sont sur une conique circonscrite à $A_1A_2A_3$ ou, ce qui revient au même, que les inverses de ces points sont en ligne droite.

On a, en effet, comme coordonnées barycentriques de ces inverses :

$$\left(\frac{1}{I}\right) \qquad \frac{1}{\sin A_1},\quad \frac{1}{\sin A_2},\quad \frac{1}{\sin A_3},$$

$$\left(\frac{1}{B}\right) \qquad \cot\frac{A_1}{2},\quad \cot\frac{A_2}{2},\quad \cot\frac{A_3}{2},$$

$$\left(\frac{1}{H}\right) \qquad \cot A_1,\quad \cot A_2,\quad \cot A_3;$$

d'où symboliquement

$$\left(\frac{1}{I}\right)+\left(\frac{1}{H}\right)=\frac{1+\cos A_1}{\sin A_1}=\cot\frac{A_1}{2},\ \cot\frac{A_2}{2},\ \cot\frac{A_3}{2}=\left(\frac{1}{B}\right).$$

D'une manière générale considérons quatre points M, N, P, Q situés sur une conique quelconque circonscrite à $A_1A_2A_3$.

D'après le théorème sur la constance du rapport anharmonique on a

$$A_1(MNPQ) = A_2(MNPQ) = A_3(MNPQ);$$

dès lors ces faisceaux découpent sur les droites quelconques Δ_1, Δ_2, Δ_3 des divisions homographiques et, en appelant M_i, N_i, P_i, Q_i les points d'intersection avec Δ_i,

on aura

$$(M_1N_1P_1Q_1) = (M_2N_2P_2Q_2) = (M_3N_3P_3Q_3).$$

Si M, N, P sont fixes sur la conique et Q variable, il est clair que de l'égalité ci-dessus résulte le théorème suivant :

Soient trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 *sur lesquelles sont tracées les intersections avec les faisceaux*

$$A_1(MNP), \quad A_2(MNP), \quad A_3(MNP).$$

Si l'on prend des points Q_1, Q_2, Q_3 *de manière à avoir des rapports anharmoniques égaux*

$$(M_1N_1P_1Q_1) = (M_2N_2P_2Q_2) = (M_3N_3P_3Q_3).$$

les droites A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3 *concourent en un point* Q *dont le lieu est la conique circonscrite à* $A_1A_2A_3$ *et passant par* M, N, P.

Ce théorème est la généralisation de celui de Kariya car il suffit de prendre comme droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 les perpendiculaires IB_1, IB_2, IB_3 et de considérer sur ces droites des divisions homographiques ayant même point à l'infini, c'est-à-dire des divisions semblables

$$\frac{IB_1}{IC_1} = \frac{IB_2}{IC_2} = \frac{IB_3}{IC_3},$$

d'où

$$IC_1 = IC_2 = IC_3,$$

puisque

$$IB_1 = IB_2 = IB_3.$$

Si les quatre points M, N, P, Q sont en ligne droite, il est clair que

$$A_1(MNPQ) = A_2(MNPQ) = A_3(MNPQ)$$

et l'on obtient sur Δ_1, Δ_2, Δ_3 des divisions homogra-

phiques avec

$$(M_1 N_1 P_1 Q_1) = (M_2 N_2 P_2 Q_2) = (M_3 N_3 P_3 Q_3).$$

Dès lors, si M, N, P sont fixes et Q variable sur cette droite en prenant sur les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 des rapports anharmoniques égaux, on obtiendra des points Q_1, Q_2, Q_3 tels que A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3 concourent en Q dont le lieu est la droite MNP.

Lorsque M est en O centre du cercle circonscrit, N au barycentre G et P à l'orthocentre H, le lieu de Q est la droite d'Euler et l'on obtient le théorème de Francke en prenant pour droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés du triangle et sur ces droites des divisions semblables.

[R3aα]

MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE, AVEC FORCES; CAS OÙ L'ELLIPSOÏDE D'INERTIE RESTE TANGENT A UN PLAN FIXE;

PAR M. G. FONTENÉ.

THÉORÈME. — *Un corps étant mobile autour d'un point fixe* O, *et ce corps étant soumis à des forces extérieures, si le moment résultant* OS *de ces forces extérieures conserve une direction fixe pendant le mouvement du corps, et si, au début du mouvement, le moment résultant* $(O\sigma)_0$ *des quantités de mouvement a la même direction, le moment résultant* $O\sigma$ *des quantités de mouvement conserve indéfiniment cette direction* OS, *la force vive* $2T$

est proportionnelle au carré σ^2 *du moment* $O\sigma$, *et l'ellipsoïde d'inertie relatif au point* O *roule sans glissement sur un plan fixe, perpendiculaire à la direction des moments résultants* OS *et* $O\sigma$, *et dont la distance au point* O *est*

$$\frac{\sqrt{2T}}{\sigma}.$$

1° Le théorème des moments des quantités de mouvement consiste en ceci : la vitesse absolue du point σ est parallèle et égale à OS; dans les conditions indiquées, la direction $O\sigma$ reste invariable.

2° En écrivant le parallélisme des directions OS et $O\sigma$ dans le système ordinaire d'axes mobiles (axes principaux d'inertie en O), on a les relations

$$\frac{A\frac{dp}{dt} - (B - C)qr}{Ap} = \frac{B\frac{dq}{dt} - (C - A)rp}{Bq} = \ldots \left(= \frac{\overline{OS}}{\overline{O\sigma}}\right);$$

on en déduit

$$\frac{Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + \ldots}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2} = \frac{A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + \ldots}{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2},$$

ou

$$\frac{d.2T}{2T} = \frac{d\sigma^2}{\sigma^2},$$

d'où

$$\frac{2T}{\sigma^2} = \text{const.};$$

on a une intégrale des équations du problème.

3° Considérons alors l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O, et soit OM le demi-diamètre dirigé suivant l'axe instantané de rotation dans le sens OI.

Avec les notations habituelles, les coefficients di-

recteurs de la normale en M sont $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$, ou Ap, Bq, Cr, de sorte que la normale en M est parallèle à la direction $O\sigma$; par suite, dans le cas actuel, cette normale a une direction fixe, $O\sigma$ ou OS.

Les coordonnées à l'origine du plan tangent en M sont $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}$; on a donc pour la distance d du point O à ce plan tangent

$$\frac{1}{d^2} = \frac{x^2}{a^4} + \ldots + \ldots = \frac{OM^2}{\omega^2}\left(\frac{p^2}{a^4}\right) + \ldots$$
$$= \frac{1}{M\omega^2}(A^2p^2 + \ldots) = \frac{\sigma^2}{2T};$$

par suite, dans le cas actuel, cette distance est constante et a pour valeur $\frac{\sqrt{2T}}{\sigma}$.

Ainsi l'ellipsoïde d'inertie reste ici tangent à un plan fixe, perpendiculaire à la direction $O\sigma$ et dont la distance au point O est $\frac{\sqrt{2T}}{\sigma}$, le point de contact M étant le pôle instantané de rotation.

4° Comme le point M possède à chaque instant une vitesse nulle, l'ellipsoïde d'inertie roule sans glissement sur le plan en question.

Remarque. — Avec $OS \neq O$, la vitesse ω de la rotation instantanée n'est pas proportionnelle à OM, la projection de la rotation instantanée sur la direction $O\sigma$ n'est pas constante.

On a

$$\frac{\omega}{OM} = \sqrt{2T} = \sigma \times d,$$

avec

$$\frac{d\sigma}{dt} = S.$$

[A4e]

SUR UN THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. MYLLER-LEBEDEFF,
Maître de conférences à l'Université de Jassy (Roumanie).

On sait l'importance de la résolution de l'équation binome

$$x^n = 1,$$

à l'aide de racines carrées, pour la Géométrie, notamment pour la construction des polygones réguliers au moyen de la règle et du compas. La discussion est fondée sur *ce théorème :*

Une équation irréductible qui peut être résolue au moyen d'extractions de racines carrées doit être d'un degré égal à une puissance de 2.

La démonstration habituelle de ce théorème (*voir*, par exemple, KLEIN, *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire*, p. 13-21) exige la discussion assez longue, d'ailleurs élémentaire, de la forme normale de la racine de l'équation, la construction de l'équation à laquelle satisfont toutes les valeurs conjuguées de la racine, et enfin la construction de l'équation du degré minimum, qu'on démontre être irréductible et unique; on emploie aussi nécessairement les propriétés des fonctions irréductibles.

Dans ce qui suit, nous donnons une autre démonstration plus courte du théorème énoncé, fondée uniquement sur les propriétés des fonctions irréductibles

et sur l'irréductibilité de la fonction $x^2 - a$, si a n'est pas carré d'un autre nombre du corps $R(a)$, le corps ou le domaine de rationalité étant défini comme d'ordinaire.

Démonstration. — Soit $f(x) = 0$ une équation irréductible du degré m résoluble à l'aide de racines carrées. $f(x)$ devient réductible après l'adjonction d'une racine de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - a = 0;$$

$f(x)$ étant encore irréductible dans le corps $R(a)$; nommons cette racine α et soit

$$(2) \qquad f(x) = f_1(x, \alpha) f_2(x, \alpha),$$

où $f_1(x, \alpha)$, $f_2(x, \alpha)$ sont des polynomes en x de degré m_1, m_2 respectivement, dont les coefficients sont fonctions rationnelles de α.

L'identité (2) en x peut être considérée comme une équation en α dont les coefficients appartiennent au corps $R(a)$. L'équation (2), ayant une racine commune avec l'équation irréductible (1), doit être satisfaite aussi par l'autre racine de l'équation (1), d'après la propriété fondamentale des équations irréductibles.

Par conséquent,

$$(3) \qquad f(x) = f_1(x, -\alpha) f_2(x, -\alpha).$$

En multipliant (2) et (3), on aura

$$f^2(x) = f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha) f_2(x, \alpha) f_2(x, -\alpha).$$

Or

$$(4) \qquad f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha) = F_1(x),$$

où $F_1(x)$ est un polynome du degré $2m_1$ ayant ses

coefficients rationnels dans $R(a)$. De même

$$f_2(x, \alpha) f_2(x, -\alpha) = F_2(x).$$

Mais si

$$f^2(x) = F_1(x) F_2(x),$$

il s'ensuit

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1(x) = f(x), \\ F_2(x) = f(x), \end{cases}$$

car $f(x)$ est irréductible dans $R(a)$.

L'hypothèse $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = f^2(x)$ doit être rejetée, car $f_1(x, \alpha)$ n'est pas une constante. La comparaison de (5) à (4) donne

$$f(x) = f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha)$$

et

$$m = 2m_1.$$

Avec le facteur $f_1(x, \alpha)$ on peut maintenant procéder comme avec $f(x)$. On a seulement à démontrer d'abord que $f_1(x, \alpha)$ est irréductible dans le corps de ses coefficients, c'est-à-dire dans $R(\alpha)$.

En effet, soit au contraire

$$f_1(x, \alpha) = \varphi_1(x, \alpha) \varphi_2(x, \alpha).$$

Comme cette relation peut être envisagée comme une équation en α avec des coefficients rationnels, on a aussi

$$f_1(x, -\alpha) = \varphi_1(x, -\alpha) \varphi_2(x, -\alpha).$$

En multipliant ces deux relations on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi_1(x, \alpha) \varphi_1(x, -\alpha) \varphi_2(x, \alpha) \varphi_2(x, -\alpha) \\ &= \Phi_1(x) \Phi_2(x), \end{aligned}$$

où $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ sont des polynomes dont les coefficients appartiennent au corps $R(a)$, ce qui ne peut pas être, $f(x)$ étant irréductible dans $R(a)$.

La fonction $f_1(x, \alpha)$, irréductible et du degré m_1, devient réductible après l'adjonction à $R(\alpha)$ d'une certaine racine carrée β qui satisfait à l'équation

$$x^2 - b = 0,$$

$f_1(x, \alpha)$ étant encore irréductible après l'adjonction de b à $R(\alpha)$. On peut donc appliquer le raisonnement précédent et conclure que

$$m_1 = 2m'_1.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à un facteur linéaire de $f(x)$, on établit que $m = 2^n$.

[L¹5][L²8]

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES NORMALES AUX CONIQUES ET AUX QUADRIQUES;

PAR UN ABONNÉ.

Dans un des derniers numéros des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (décembre 1914), M. J. Lemaire a montré qu'on peut donner, de l'hyperbole d'Apollonius et de la cubique gauche aux pieds des normales, issues d'un point à une quadrique, des définitions absolument analogues. Celle qu'il a choisie n'est pas la seule qui jouisse de cette propriété. Il en existe d'autres qui s'étendent sans difficulté, et avec la plus entière analogie, de la première courbe à la seconde.

Tout d'abord on peut changer, très légèrement, la

définition de M. J. Lemaire, et lui donner une forme souvent plus utile dans les applications.

C'est ainsi qu'on peut dire que l'hyperbole d'Apollonius, relative à un point P, est le lieu des points dont les polaires, par rapport à la conique donnée, sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point P. De même, la cubique gauche, relative à un point P, est le lieu des points dont les plans polaires, par rapport à la quadrique donnée, sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point P.

On sait aussi que l'hyperbole d'Apollonius est le lieu des points de rencontre des sécantes communes à la conique et à une série de cercles ayant pour centre commun le point P. Dans l'espace, la cubique gauche est le lieu des sommets des cônes du deuxième degré, passant par l'intersection de la quadrique et d'une série de sphères ayant pour centre commun le point P.

L'hyperbole d'Apollonius est encore le lieu des centres des coniques qui passent par les points communs à la conique et à un cercle de centre P. Pour la cubique gauche, on peut dire qu'elle est le lieu des centres des quadriques passant par l'intersection de la quadrique donnée et d'une sphère de centre P.

Les analogies ne s'arrêtent pas là. L'hyperbole passe par le point P, par le centre de la conique et par les points à l'infini sur ses axes. Elle ne change pas si l'on remplace la conique donnée par une autre qui lui soit homothétique et concentrique. De même la cubique gauche passe par le point P, par le centre de la quadrique et par les points à l'infini sur ses axes. Elle reste invariable quand la quadrique considérée se déforme en restant homothétique et concentrique à elle-même.

Dans les cours de Mathématiques spéciales, après avoir montré que le problème qui consiste à mener des normales à une conique par un point donné peut se résoudre par l'hyperbole d'Apollonius, on indique que cette hyperbole passe, comme nous venons de le dire, par le point P, par le centre de la conique et par les points à l'infini sur ses axes. Il faut observer que la connaissance de ces quatre points ne suffit pas à sa détermination et que, si jamais on doit la tracer sur le papier, il est indispensable d'y joindre d'autres éléments.

D'ailleurs, au point de vue graphique, on ne connaît jamais trop de points d'une courbe. Au point de vue géométrique, le fait qu'un nombre de points, supérieur à celui qui est nécessaire pour la déterminer, est situé sur elle, entraîne des propriétés ou des théorèmes. Les définitions précédentes permettent d'ajouter aux points qui, dans tous les Traités, sont indiqués comme étant sur l'hyperbole, un certain nombre de points nouveaux; de sorte qu'au total on en connaît beaucoup plus qu'il n'est nécessaire pour la déterminer.

C'est ainsi que, si l'on joint le point P aux foyers de la conique et si l'on prend les points de rencontre des droites ainsi obtenues avec les directrices correspondantes, on obtient deux points de l'hyperbole. De même sont situés sur elle les points d'intersection de la polaire de P, par rapport à la conique donnée, avec les bissectrices de l'angle formé par les tangentes issues de P. Enfin si la conique donnée est une hyperbole, si de P on abaisse les perpendiculaires sur ses asymptotes, si l'on prend le point de rencontre de chacune de ses perpendiculaires avec l'autre asymptote, on obtient encore deux points de l'hyperbole d'Apollonius. Dans le cas de l'ellipse, les asymptotes sont

imaginaires, mais on obtient deux points analogues en les remplaçant par les diamètres conjugués égaux.

Pour s'assurer que tous ces points sont bien sur l'hyperbole, il suffit de remarquer que leurs polaires sont perpendiculaires aux droites qui les joignent à P.

Cela fait au total, avec les points classiques, dix points remarquables situés sur l'hyperbole d'Apollonius. Le théorème de Pascal, par exemple, appliqué à six quelconques d'entre eux, fournit chaque fois une propriété de cette courbe.

Dans l'espace, les Ouvrages classiques n'indiquent que cinq points situés sur la cubique gauche; ce qui est insuffisant pour sa détermination. On peut y en ajouter d'autres; par exemple les points d'intersection du plan polaire de P avec les axes du cône, de sommet P, circonscrit à la quadrique donnée. Mais il faut bien remarquer que le moyen le plus naturel, pour construire la cubique, consiste à considérer les cylindres qui la projettent sur deux des plans principaux de la quadrique. Ces cylindres ont pour traces, sur ces plans, deux hyperboles équilatères, qui sont les hyperboles d'Apollonius des projections du point P, par rapport aux sections principales correspondantes. Leur intersection, du quatrième ordre au total, se compose de la cubique gauche et d'une droite rejetée à l'infini.

Revenons au cas du plan. Si la conique donnée est une hyperbole, les droites qui joignent son centre aux points de l'hyperbole d'Apollonius, situés sur ses asymptotes, sont deux cordes supplémentaires de cette dernière, puisqu'elles sont également inclinées sur ses axes. Le centre de l'hyperbole d'Apollonius est donc le milieu du segment qui joint ces deux points. Si la conique donnée est une ellipse, il faut remplacer les

asymptotes par les diamètres conjugués égaux; mais la construction du centre ne change pas.

Dans tous les cas, on connaît le centre de l'hyperbole d'Apollonius, par suite aussi ses asymptotes, ses axes et tous ses éléments remarquables.

CORRESPONDANCE.

M. **H. Brocard.** — *Au sujet de la néphroïde de Proctor* (1915, p. 97-105). — C'est de 1878 que date la dénomination de *néphroïde* proposée par Proctor, pour désigner l'épicycloïde à deux rebroussements, déjà rencontrée depuis longtemps comme caustique par réflexion d'un miroir cylindrique circulaire concave pour les rayons du Soleil perpendiculaires à l'axe. On en trouvera une belle représentation dans la figure 77 des *Éléments du Calcul infinitésimal* de Duhamel (t. I, 1860), avec une étude, pages 205-207. C'est le théorème énoncé ici (*loc. cit.*), pages 99-100.

L'enveloppe de cercles (*ibid.*, p. 99) a été signalée aussi à diverses reprises, notamment par M. Barisien (question 2123, 1909, p. 143; résolue 1910, p. 141), et encore comme enveloppe de cercles associés à une certaine ellipse dont un axe est moitié de l'autre (question 2104, 1908, p. 479; résolue 1909, p. 247).

La développée de cette épicycloïde est naturellement une autre épicycloïde de mêmes singularités.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

Épreuve théorique. — I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ *et une surface* $z = F(x, y)$, *former l'équation différentielle des lignes tracées sur la surface, et telles que la tangente à l'une de ces lignes en un point quelconque et la tangente conjuguée à la surface au même point aient pour projections orthogonales sur le plan* XOY *deux droites rectangulaires. Faire voir qu'il existe sur la surface deux familles de lignes jouissant de cette propriété, et qu'elles forment un réseau conjugué.*

En supposant que la surface ait pour équation

$$z = a\frac{y}{x},$$

où a désigne une longueur donnée, effectuer l'intégration de l'équation différentielle, reconnaître la nature des courbes qui composent le réseau orthogonal obtenu en projection sur le plan XOY, *et déterminer les deux lignes de ce dernier réseau qui passent par un point donné du plan.*

II. *Les axes* OX, OY, OZ *étant supposés rectangulaires, on mène par un point* A, *situé sur la partie positive de l'axe* OX *à une distance donnée a de l'origine, une parallèle* Δ *à l'axe* OY *et l'on considère la surface* Σ *ayant pour génératrice une droite mobile assujettie à la triple condition de s'appuyer constamment sur l'axe* OZ, *sur la droite* Δ *et de rester constamment à la distance a de l'origine : représenter analytiquement la surface* Σ *et faire voir que, en désignant par* P *le pied de la perpendi-*

culaire menée de l'origine sur la génératrice, le lieu du point P *est une ligne de courbure de* Σ.

Épreuve pratique. — *Évaluer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos x}{(5 - 3\cos x)^2}\, dx.$$

(Juin 1914.)

Clermont.

Épreuve théorique. — *Trouver l'équation différentielle dont dépend, sur une surface donnée, un système de courbes conjuguées se projetant sur un plan, également donné, suivant un système de courbes orthogonales. Cas où la surface est une quadrique et le plan un de ses plans principaux; intégration de l'équation obtenue. Trouver les surfaces pour lesquelles le système de courbes orthogonales se réduit aux deux familles de droites parallèles aux axes.*

Épreuve pratique. — *Si, par un point* C *pris sur la directrice d'une chaînette, on mène deux tangentes* CA, CD *à la chaînette, l'arc* AD *et la ligne brisée* ACD *décrivent des surfaces égales en tournant autour de la directrice.*

(Juin 1914.)

Lyon.

Composition écrite. — *Étudier l'équation aux dérivées partielles*

$$q^2 y^2 + 3pxz = 0.$$

1. *Chercher une intégrale complète de cette équation, en observant que les équations différentielles des caractéristiques admettent l'intégrale première*

$$3px + a^2 z = 0,$$

où a est une constante arbitraire.

2. *Quel est le complexe des courbes caractéristiques?*

3. *Écrire l'équation du cône* T, *enveloppe du plan*

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

quand, x, y, z étant fixes, on a

$$q^2y^2 + 3pxz = 0.$$

Quelle est l'équation aux différentielles totales des courbes intégrales? Trouver l'équation d'une courbe intégrale quelconque en la considérant comme l'enveloppe des courbes caractéristiques situées sur une surface intégrale générale.

4. *Il est aisé de vérifier que la cubique $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ est une courbe intégrale. Quelle est la surface intégrale qui passe par cette courbe?*

5. *Existe-t-il des surfaces intégrales dont l'équation soit de la forme $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$?*

6. *Quelles sont les lignes asymptotiques de la surface intégrale complète et, en particulier, des surfaces trouvées aux nos 4 et 5?*

Épreuve pratique. — I. *Calculer l'intégrale*

$$\int\int x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

étendue à la surface d'un tore engendré par la circonférence $y = 0$, $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ tournant autour de Oz.

II. *Calculer* $\int \frac{du}{p'u + a}$, *où a est une constante.*

(Juillet 1914.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *On donne l'équation différentielle*

$$(x - y)(y - 1) - x(x - y + 2)y' = 0.$$

En déterminer des solutions particulières de la forme

$$y = \alpha x + \beta,$$

α et β étant des constantes. Trouver un facteur intégrant

du type $(X+Y)^m$, X *et* Y *étant respectivement fonctions de* x *seul et de* y *seul.*

Épreuve pratique. — *On considère l'intégrale*

$$\int \cot \pi z \frac{dz}{z^{2m}},$$

prise, dans le plan complexe, le long d'un cercle ayant son centre à l'origine, et pour rayon $n+\frac{1}{2}$ (n *et* m *entiers positifs*).

En déduire que l'expression $\frac{1}{\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}$ *est un nombre rationnel, facilement calculable au moyen des coefficients du développement de*

$$\cot z = \frac{1}{z} + \alpha_1 z - \alpha_3 z^3 - \ldots.$$

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}$ *pour* $m = 1, 2, 3.$ (Juin 1914.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Déterminer les surfaces intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles*

$$(E) \qquad px + qy - \sqrt{1-(x^2+y^2)} = 0.$$

II. *Soit* z *l'une quelconque des surfaces intégrales de l'équation* E :

1° *Montrer que si l'on pose* $\sqrt{x^2+y^2} = \sin u$, *les coordonnées d'un point quelconque* M *de* z *peuvent se mettre sous la forme*

$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v,$$

$$z = \cos u + \log \operatorname{tang} \frac{u}{2} - \varphi(v),$$

$\varphi(v)$ *désignant une fonction de la seule variable* v, *et* v *étant l'angle que le plan* MOz *fait avec le plan* zOx;

2° *Démontrer que les courbes* $v = \text{const.}$ *sont planes et que le plan de chacune d'elles coupe la surface* ε *sous un angle constant;*

3° *Déterminer le second système de lignes de courbures de la surface* ε *et montrer qu'il est composé de courbes sphériques;*

4° *Calculer, en utilisant l'une des formules d'Olinde Rodrigues, les rayons de courbures principaux en un point quelconque* M *de* ε.

III. *Soit* ε_0 *la surface* ε *particulière définie par les équations*

$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = \cos u + \log \operatorname{tang} \frac{u}{2}:$$

1° *Quelle est la nature de cette surface* ε_0, *quelles sont ses lignes de courbure?*

2° *Déterminer les lignes asymptotiques de* ε_0;

3° *Quelles sont les valeurs des rayons de courbure principaux en un point quelconque de* ε_0? *Montrer que leur produit est constant.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}:$$

1° *En décomposant en fractions rationnelles;*

2° *En appliquant la théorie des résidus.*

Faire ensuite le changement de variable

$$x = \operatorname{tang} y$$

et en déduire l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-\cos u}{1-\cos^2 u}\,du.$$

(Juin 1914.)

A PROPOS DES QUESTIONS DES « NOUVELLES ANNALES ».

Les *questions proposées* ont toujours tenu dans ce Journal une place importante, depuis sa fondation. Elles ont été d'utiles exercices pour beaucoup de jeunes lecteurs; elles ont suscité souvent d'intéressantes remarques nouvelles, et servi de point de départ à des travaux publiés soit ici même, soit ailleurs.

Il serait désirable de les voir toutes résolues, ou du moins examinées à fond, car il en est un petit nombre qui ont été reconnues inexactes, et d'autres sont insolubles.

A la fin de l'année 1900, un *Tableau de correspondance* entre les questions et les réponses a été publié, remontant jusqu'à la fondation du journal. Le résultat de cette publication fut excellent; un grand nombre de questions furent étudiées à nouveau, résolues pour la plupart, quelques-unes retirées comme inexactes.

Aujourd'hui, une nouvelle revision serait extrêmement utile. Notre collaborateur dévoué, M. le Colonel Brocard, en a réuni les éléments principaux, et c'est grâce à lui que nous pouvons présenter cette Note, qui est en réalité son œuvre. En l'en remerciant, nous ne faisons que traduire par avance le sentiment de nos lecteurs.

Une première observation se présente. Il est arrivé quelquefois que des réponses à des questions proposées ont été introduites incidemment dans des articles; elles ont pu échapper alors à l'attention; et ces questions

sont restées dans la catégorie « non résolues ». Il est donc à désirer que les auteurs d'articles, dans ce cas, veuillent bien accompagner leur texte d'une note à part, rappelant le numéro de la question et le nom de celui qui l'a posée.

Une nouvelle revision a été faite des questions restées sans réponse à l'heure actuelle. Nous en donnons le résultat plus loin, sans pouvoir en affirmer l'exactitude absolue, malgré tout le soin et toute l'attention qui ont été apportés à ce travail. Les lecteurs qui s'intéressent à cette partie de notre publication nous apporteront une collaboration précieuse en rectifiant les erreurs qui pourraient subsister.

Il est naturel que l'on ne réponde pas à bref délai à une question proposée; mais d'autre part, lorsque la publication de l'énoncé remonte à plusieurs années, il est probable que l'absence de toute réponse tient, soit à l'extrême difficulté du sujet, soit à un manque de clarté du texte, soit même à l'inexactitude de la proposition, ou à l'impossibilité d'une solution, ou encore, bien souvent, à la difficulté pour le lecteur de remonter à un Volume déjà éloigné.

Cette considération a conduit à diviser les questions en deux catégories : *anciennes* et *nouvelles*, et à ne faire porter le travail de revision que sur la première. On s'est arrêté, comme limite des questions anciennes, à la fin de l'année 1910, c'est-à-dire à un recul de cinq ans environ en arrière de la date actuelle. C'est en conséquence aux questions posées depuis l'année 1872 jusqu'à la fin de 1910 (n°s 1 à 2168) que s'appliquent les observations qui suivent.

A l'heure où nous rédigeons cette Note, il reste environ 260 de ces anciennes questions qui n'ont pas été résolues, ce qui représente à peu près 12 pour 100.

Un grand nombre d'entre elles, malheureusement, ont pour auteurs des mathématiciens aujourd'hui décédés, parmi lesquels nous pouvons citer les noms de Bourlet, Cesàro, Dewulf, Duporcq, H. Faure, Laguerre, etc. Des recherches dans les papiers qu'ils ont pu laisser ne sont guère possibles et auraient sans doute de bien faibles chances d'amener des résultats. Mais un grand nombre des exercices ainsi posés comme questions se rapportent à des travaux publiés par les auteurs. Et certains de nos lecteurs, qui se sont livrés spécialement à l'étude de ces travaux, rendraient aux *Nouvelles Annales* un précieux service en portant leur attention plus spécialement sur les questions dont il s'agit.

Quant aux questions posés par des auteurs vivants, ce n'est pas trop leur demander que de solliciter leur attention vers des sujets qui les ont intéressés, qui sans doute les intéressent encore, en les priant de nous envoyer les réponses qu'ils ont eux-mêmes attendues vainement depuis de longues années, et qu'ils peuvent donner mieux que personne.

Une excellente pratique, pour le présent et pour l'avenir, consisterait à imiter ce que certains de nos collaborateurs ont fait spontanément, c'est-à-dire à joindre une solution à la question posée par eux. De préférence, on publiera les solutions venues du dehors; mais s'il n'en vient pas, on a du moins une assurance de ne pas voir s'accumuler indéfiniment ce stock regrettable, et, après une attente plus ou moins prolongée, de pouvoir donner la réponse de l'auteur lui-même.

Quelques observations encore sont utiles; nous avons dit un mot ci-dessus des théorèmes inexacts ou des problèmes insolubles par leur nature même. A côté de cette catégorie, d'ailleurs peu nombreuse, il y a des exemples d'énoncés obscurs, mal rédigés, dont l'absence

de clarté a dû rebuter les chercheurs. Il y a aussi les questions « polycéphales », imputables à la Rédaction plus qu'aux auteurs. Nous entendons par là le groupement, sous le même numéro d'ordre, de plusieurs énoncés tout à fait distincts, parfois n'ayant pas entre eux le moindre rapport. Une réponse arrive, s'appliquant à l'un de ces énoncés; on la publie. La question n° x est alors résolue, et cependant elle ne l'est pas. Nous nous proposons, dans ce cas, de faire réapparaître la question non résolue en lui appliquant un numéro *bis*. L'énoncé **1704** nous fournit un exemple de cette nature; il y en a malheureusement bien d'autres, notamment **711** qui contient quatre sujets différents.

Il peut y avoir d'autres applications de numéros *bis* résultant d'une erreur de numérotage lors de la publication. Nous en avons remarqué un exemple : celui du n° **1856**, sous lequel furent imprimées deux questions proposées différentes. La seconde est classée **1856** *bis*. Il y a lieu d'espérer qu'une erreur de cette nature ne se reproduira plus.

Il faut signaler aussi les doubles emplois, inévitables. Une question a été posée, il y a plus ou moins longtemps. Résolue ou non, elle a été oubliée; et un autre auteur, sous un nouveau numéro, et sans le savoir, la fait réapparaître. Quand la Rédaction s'apercevra du fait, ou quand un lecteur le lui aura fait connaître, une simple note suffira pour débarrasser de cet élément parasite la liste des questions non résolues. Nous nous étions demandé s'il ne pourrait pas y avoir intérêt à réimprimer le texte des questions restées sans solution. C'est ce qu'on avait commencé à faire, il y a quelques années, et le résultat fut satisfaisant. Toutefois, il nous a semblé qu'avant de procéder à cette réimpression, que nous ne repoussons pas en principe, il y

aurait lieu de poursuivre un travail de « déblaiement », pour lequel la liste des numéros peut suffire.

Nous ne saurions assez insister auprès de nos dévoués lecteurs sur ce sujet si intéressant; auprès de ceux-là surtout qui ont posé des questions et qui en posent encore. Nous les convions notamment à corriger les erreurs qui auraient pu nous échapper et à nous faire part de leurs observations et de leurs réflexions, dont tous pourront ainsi profiter. Et nous leur en exprimons dès maintenant notre sincère gratitude.

La Rédaction.

Liste des numéros des questions restées sans solutions depuis 1842 jusqu'à 1910 inclusivement.

62	126	261	266	333	383	400	424
512	513	546	554	585	592	593	598
604	606	607	617	643	693	703	718
724	729	730	731	732	772	774	791
805	812	815	820	821	848	851	852
859	861	880	888	891	892	893	895 *bis*
947	967	989	999	1000	1004	1007	1008
1015	1035	1042	1058	1063	1074	1078	1092
1105	1107	1108	1149	1206	1234	1236	1256
1305	1310	1321	1359	1361	1363	1364	1365
1366	1390	1392	1393	1394	1402	1403	1435
1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445
1446	1447	1471	1479	1483	1486	1490	1502
1503	1508	1510	1511	1519	1522	1523	1527
1528	1530	1531	1551	1564	1571	1576	1582
1585	1588	1596	1599	1600	1609	1614	1629
1631	1647	1650	1655	1656	1657	1660	1672
1677	1678	1680	1686	1687	1688	1689	1690
1691	1692	1693	1694	1695	1704 *bis*	1705	1710
1715	1721	1731	1738	1747	1751	1754	1756
1761	1762	1763	1770	1775	1776	1777	1779
1784	1785	1796	1799	1809	1810	1811	1816
1820	1821	1824	1825	1826	1827	1828	1832
1834	1837	1838	1839	1841	1842	1843	1847
1848	1850	1852	1854	1856 *bis*	1859	1864	1871
1872	1873	1876	1878	1880	1882	1884	1885
1886	1889	1890	1892	1894	1908	1909	1910
1911	1914	1915	1937	1944	1950	1956	1957
1981	1988	1992 *bis*	2003	2010	2012	2014	2015
2038	2039	2045	2056	2057	2062	2063	2065
2078	2096	2114	2116	2118	2120	2121	2141
2145	2151	2152	2156	2160	2161	2166	

OBSERVATIONS.

Un certain nombre de questions, sans solutions jusqu'ici, ne figurent pas dans cette liste, parce que la Rédaction possède des solutions ou des Notes qui s'y rapportent, et qui seront prochainement publiées.

516 fait double emploi avec 347 (sol. **1858**, 331 et **1863**, 320).

596 fait double emploi avec 589 (sol. **1905**, 86).

895 comprenait deux énoncés très différents; le premier a été résolu (1869, 549). C'est au second que s'applique le n° 895 *bis*.

1013 fait double emploi avec 910 (sol. **1871**, 184, 235, 237).

1617. Un article de l'auteur, M. d'Ocagne (**1892**, 326) traite du même sujet (th. III, p. 329) mais sans viser la question.

1628 a été résolue dans d'autres périodiques, qu'indique un article « Correspondance » (**1903**, 411).

1856 *bis* est une question qui avait à tort été numérotée 1856.

1992 comprenait deux énoncés différents; le premier a été résolu (**1904**, 475). C'est au second que s'applique le n° 1992 *bis*.

2111 a été résolue (**1910**, 128) dans un article de M. Bricard: « Sur un théorème de Mannheim ».

Nous accueillerons avec empressement les observations complémentaires utiles qui auraient pu nous échapper. En outre, nous renouvelons nos instances les plus pressantes, surtout auprès des auteurs de questions non résolues, pour obtenir des solutions aussi nombreuses que possible.

[O'2p, q]

NOTE SUR LES ROULETTES ET LES GLISSETTES PLANES, A BASE RECTILIGNE;

PAR M. F. BALITRAND.

L'article de M. L. Braude, paru dans les *Nouvelles Annales* (avril 1914, p. 166), nous a suggéré l'idée d'appliquer les coordonnées tangentielles polaires à l'étude des roulettes et des glissettes planes, à base rectiligne. Les formules auxquelles on parvient dans ce système de coordonnées sont particulièrement simples. Après les avoir établies, nous en ferons quelques applications, choisies parmi les plus faciles et les plus élémentaires.

I. — ROULETTES.

Formules fondamentales. — Prenons un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy; l'axe Ox servira de base rectiligne. Une courbe mobile (C), de forme invariable, roulera sur Ox et entraînera dans son mouvement un point, qui lui est invariablement lié, P; en lui faisant décrire une courbe (P), ou roulette (P). Désignons par M le point de contact de (C) avec Ox; abaissons de P la perpendiculaire PQ sur le même axe; les coordonnées cartésiennes d'un point de la roulette sont

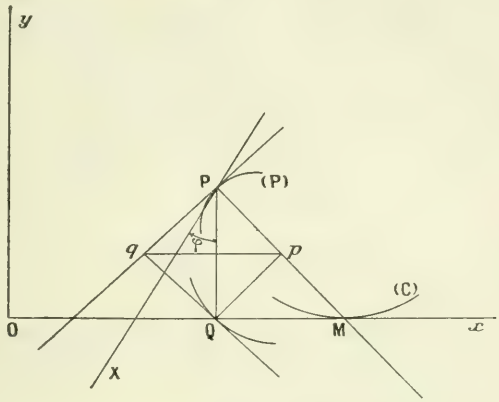
$$x = \mathrm{OQ}, \qquad y = \mathrm{PQ}.$$

Soit, en coordonnées tangentielles polaires,

$$(1) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad [\text{avec } p = f(\varphi)]$$

l'équation de la courbe mobile. Le pôle est au point P; l'axe polaire est une droite PX, menée par ce point,

Fig. 1.



invariablement liée à (C), et faisant avec PQ un angle égal à φ.

Dans ce système de coordonnées, l'élément d'arc de (C) a pour expression

$$ds = (p + p'')\, d\varphi,$$

d'où

$$s = p' + \int p\, d\varphi;$$

d'autre part, on sait que $QM = p'$. Donc

$$x = OQ = OM - QM = \int p\, d\varphi;$$

pourvu qu'on choisisse, sur la courbe mobile, l'origine des arcs en un point ω tel que arc $\omega M = OM$. En résumé, on a les formules

$$(2) \qquad x = \int p\, d\varphi = \int f(\varphi)\, d\varphi, \qquad y = p = f(\varphi),$$

qui expriment les coordonnées cartésiennes (x et y)

d'un point de la roulette en fonction du paramètre φ; d'où l'on peut tirer, si l'on veut, l'équation cartésienne de la roulette, sous la forme ordinaire, par l'élimination de φ entre lesdites équations.

Faisons quelques applications des formules (2). En premier lieu, supposons que la courbe mobile soit la spirale logarithmique d'équation $p = ae^{m\varphi}$. Les coordonnées d'un point de la roulette décrite par son pôle sont

$$x = \frac{1}{m} ae^{m\varphi}, \qquad y = ae^{m\varphi};$$

d'où $y = mx$; équation d'une droite passant par l'origine.

Supposons en second lieu que la courbe roulante soit la développante de cercle $p = a\varphi$. La roulette est la parabole d'équation

$$y^2 - 2ax = 0.$$

Prenons enfin pour courbe mobile l'épicycloïde

$$p = a \sin m\varphi,$$

où a et m sont deux constantes ayant les valeurs suivantes :

$$a = \mathrm{R} + 2r, \qquad m = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + 2r},$$

R et r étant les rayons des cercles fixe et mobile. Pour passer à l'hypocycloïde, il suffit de changer le signe de r. La roulette décrite par le centre du cercle directeur est l'ellipse

$$m^2x^2 + y^2 = a^2.$$

Problème inverse des roulettes. — C'est le problème qui consiste à trouver une courbe, telle que, dans son roulement sur une droite, un point, qui lui

est invariablement lié, engendre une courbe donnée à l'avance. Les formules précédentes le résolvent et montrent que *toute courbe plane est une roulette à base rectiligne.*

En effet, si x et y sont donnés en fonction d'un paramètre t, par les relations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \Phi(t),$$

la courbe cherchée, en vertu des formules précédentes, aura pour coordonnées tangentielles polaires

$$d\varphi = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\Phi(t)}, \qquad p = \Phi(t);$$

et, par l'élimination de t, on pourra arriver, si l'on veut, à son équation sous la forme ordinaire $p = f(\varphi)$.

Par exemple, si l'on s'impose que la roulette soit la droite $y = mx$, on a

$$p = y, \qquad d\varphi = \frac{dx}{p} = \frac{dy}{my} = \frac{dp}{mp};$$

d'où

$$p = ae^{m\varphi},$$

équation d'une spirale logarithmique; résultat conforme à celui qui a été trouvé précédemment.

D'une façon générale, toutes les fois que l'équation de la roulette sera de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

celle de la courbe roulante sera

$$\frac{dp}{d\varphi} = pf(p).$$

Ainsi dans le cas où la roulette est la parabole

$$y^2 - 2ax = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y},$$

la courbe mobile est la développante de cercle $p = a\varphi$.

Si, comme roulette, on prend la chaînette d'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a},$$

celle de la courbe mobile est

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{p\sqrt{p^2 - a^2}}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{d\varphi} = \frac{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{p^2}}}{\frac{a^2}{p^2}};$$

d'où

$$p = \frac{a}{\cos\varphi},$$

équation d'une parabole rapportée à son foyer; c'est le théorème bien connu de Bobilier.

Enveloppe d'une droite. — On peut se limiter au cas d'une droite passant par le pôle, puisque des droites parallèles ont pour enveloppes des courbes parallèles. D'ailleurs, l'axe polaire PX, étant arbitraire, on peut supposer que la droite invariablement liée à la courbe mobile, dont on cherche l'enveloppe, coïncide avec lui. Comme il fait avec l'axe des x un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$, son équation est

$$(3) \qquad \left(x - \int p\, d\varphi\right)\cos\varphi - (y - p)\sin\varphi = 0.$$

L'équation tangentielle polaire de l'enveloppe est donc

$$P = p\sin\varphi - \cos\varphi \int p\, d\varphi.$$

Pour avoir les coordonnées cartésiennes du point de contact, différentions l'équation (3), ce qui donne

$$(4) \qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi - s\sin\varphi = 0;$$

c'est l'équation d'une droite passant par le point M et perpendiculaire à l'axe polaire : résultat qui pouvait être prévu à l'avance. Des équations (3) et (4) on tire

$$(5)\qquad \begin{cases} x = s - (p\sin\varphi + p'\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = (p\sin\varphi + p'\cos\varphi)\sin\varphi; \end{cases}$$

ce sont les coordonnées du point de contact.

Supposons par exemple que la courbe roulante soit un cercle ayant son centre au point P; dans ce cas,

$$p = a, \qquad p' = 0.$$

L'enveloppe d'un diamètre a pour équation tangentielle

$$P = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi);$$

c'est une cycloïde. Pour s'en assurer, il suffit de calculer, au moyen des formules (5), les coordonnées du point de contact. On trouve

$$x = \frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Examinons en second lieu le cas où la courbe roulante est la spirale logarithmique $p = ae^{m\varphi}$. L'équation de l'enveloppe d'une droite menée par le pôle est

$$P = ae^{m\varphi}\left(\sin\varphi - \frac{1}{m}\cos\varphi\right).$$

Or, si l'on appelle V l'angle constant sous lequel la courbe est coupée par ses rayons vecteurs, on a

$$m = \cot V;$$

donc

$$P = \frac{ae^{m\varphi}}{\cos V}\sin(\varphi - V),$$

c'est l'équation tangentielle de la courbe cherchée. En

posant $\varphi - V = \psi$, elle peut se mettre sous la forme

$$P = \alpha e^{m\psi} \sin\psi,$$

α désignant une constante. Les coordonnées cartésiennes d'un de ses points sont

$$x = -\frac{ae^{m\varphi}}{\cos V}[\sin V + m \sin\varphi \sin(\varphi - V)],$$

$$y = -\frac{ae^{m\varphi}}{\cos V}[\cos V + m \cos\varphi \cos(\varphi - V)].$$

Rectification. — Des équations (2) différentiées on déduit, en appelant σ l'arc de la roulette,

$$(6) \qquad d\sigma = \sqrt{p^2 + p'^2}\, d\varphi = r\, d\varphi,$$

r étant le rayon vecteur PM.

Or, $r\, d\varphi$ représente l'élément d'arc de la podaire lieu du point Q. En effet, soient M_1 un point, sur (C), infiniment voisin de M; Q_1 la position correspondante de Q. En projetant Q en Q'_1 sur PQ_1, on a, en vertu de la propriété fondamentale de la tangente à la podaire,

$$\text{arc}\, QQ'_1 = PQ\, d\varphi = \text{arc}\, QQ_1 \times \cos Q_1 QQ'_1$$

et

$$PQ = PM \times \cos Q_1 QQ'_1;$$

d'où

$$r\, d\varphi = \text{arc}\, QQ_1;$$

c'est le théorème de Steiner :

L'arc de la roulette (P) *à base rectiligne, et l'arc de la podaire de la courbe roulante par rapport à* P, *correspondant à un même arc de la courbe roulante, sont égaux.*

Si une parabole roule sur une droite, son foyer décrit une chaînette. La podaire du foyer est la tangente

au sommet; donc la chaînette est absolument rectifiable.

Si c'est une épicycloïde qui est la courbe roulante, le centre du cercle directeur décrit une ellipse. La podaire de ce centre est une rosace; donc l'arc d'une rosace quelconque s'exprime au moyen des fonctions elliptiques. Lorsqu'une spirale sinusoïde roule sur une droite, son pôle décrit une courbe de Ribeaucour. Comme la podaire d'une spirale sinusoïde est une autre spirale sinusoïde, l'arc d'une ligne de Ribeaucour est toujours égal à l'arc d'une certaine spirale.

La normale en Q à la podaire s'obtient en joignant ce point au milieu p de PM. La tangente au même point coupe en q la tangente en P à la roulette. Les triangles Ppq et Qpq sont égaux et il en est de même des angles qPQ et qQP. Donc, si l'on déplace la podaire et son pôle P, de manière que le point Q vienne en P et que les deux courbes se touchent en ce point, le pôle P viendra en Q sur Ox. Comme les arcs des deux courbes sont égaux, le même fait se reproduira pour tous les couples de points correspondants de la podaire et de la roulette. Autrement dit :

Si l'on fait rouler la podaire sur la roulette, son pôle décrit l'axe Ox.

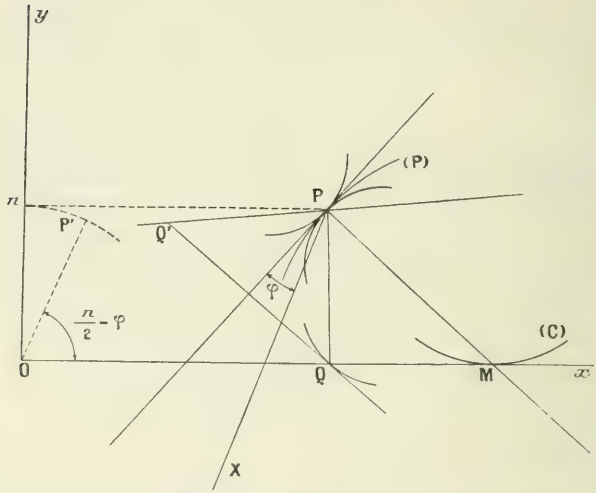
C'est le théorème de Habich. C'est un cas particulier du théorème suivant que nous avons donné dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1915, p. 90) :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point invariablement lié à une courbe mobile, qui roule sur une courbe fixe, décrive une droite, est que la courbe mobile et la courbe fixe soient respectivement la radiale et la courbe de Mannheim d'une troisième courbe.

Le contact de la podaire et de la roulette, en P, peut se produire de deux façons, suivant que les deux courbes ont leurs concavités opposées ou de même sens. Le théorème de Habich ne s'applique qu'à l'un des deux cas.

Dans l'autre cas, les deux positions de la podaire étant symétriques, par rapport à la tangente en P, le pôle vient en Q′, symétrique de Q par rapport à cette tangente (*fig.* 2). On voit aisément que Q′P est la

Fig. 2.



normale en Q′ à la courbe lieu de ce point. La normale à la roulette PM, étant parallèle à QQ′, est bissectrice de l'angle de QP et de Q′P prolongé. Donc, si QP est un rayon incident, Q′P prolongé est le rayon réfléchi :

Le lieu décrit par le pôle Q′ est donc une anticaustique de la roulette pour des rayons perpendiculaires à la base.

Projetons P en π sur Oy; traçons le cercle de centre O et de rayon $O\pi$ et menons par O une droite parallèle à l'axe polaire PX qui coupe le cercle en P'. *Je dis que le lieu de* P', *quand* P *décrit la roulette, est une courbe égale à la polaire.* En effet, les rayons vecteurs des deux courbes, issus respectivement de O et de P, sont égaux. L'angle polaire $P'Ox = \omega$ est égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$; d'où $d\omega = -d\varphi$. Les arcs élémentaires des deux courbes sont égaux : ce qui, ajouté à l'égalité des rayons vecteurs, démontre la proposition.

Revenons à la formule (6). $d\varphi$ étant égal à $\frac{ds}{\rho}$, elle peut s'écrire

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{r}{\rho}. \tag{7}$$

On peut encore la mettre sous la forme

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{dp}{dr}, \tag{8}$$

car on a pour ρ la valeur connue

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp}.$$

Quelle que soit la courbe mobile, elle peut toujours être définie, soit par une relation entre ρ et r, soit par une relation entre p et r. Prenons la formule (7) et supposons que la courbe mobile ait pour équation, ce qui est le cas le plus simple, $\frac{r}{\rho} = K$, K étant une constante.

Il en résulte $d\tau = K\,ds$. Mais ds est égal à dl

$$(l = OM);$$

donc, si la courbe mobile est caractérisée par la rela-

tion

$$\frac{r}{\rho} = K,$$

la roulette décrite par le pôle est telle que ses normales découpent sur la base et sur la roulette des segments proportionnels. Ces courbes ont été étudiées à plusieurs reprises dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 1902, p. 181-184, 337-443, 481-482; 1914, p. 97 et suiv.). Les roulettes ainsi obtenues sont intéressantes, parce qu'elles fournissent une classe de courbes rectifiables par la ligne droite. On sait que, parmi les courbes classiques, il y en a fort peu qui jouissent de cette propriété.

Supposons maintenant que la courbe mobile soit définie par une relation entre p et r. La formule (8) montre que l'hypothèse la plus simple est celle où

$$\frac{dp}{dr} = \text{const.};$$

mais en réalité ce cas n'est pas distinct du précédent en vertu de la relation

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp}.$$

Écartant cette hypothèse, on est alors conduit aux deux suivantes : soit

$$\frac{dp}{dr} = K\frac{r}{p},$$

soit

$$\frac{dp}{dr} = K\frac{p}{r}.$$

La première correspond au cas où la courbe roulante est une épicycloïde; la seconde au cas où elle est une spirale sinusoïde.

En effet, l'équation tangentielle polaire d'une épi-

cycloïde étant

$$p = \alpha \sin m\varphi,$$

on en déduit

$$p' = m\alpha \cos m\varphi;$$

puis,

$$r^2 = p^2 + p'^2 = \alpha^2(\sin^2 m\varphi + m^2 \cos^2 m\varphi)$$
$$= (1 - m^2)p^2 - m^2\alpha^2;$$

d'où

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dp}{dr} = \frac{1}{1 - m^2} \times \frac{r}{p}.$$

Si l'on désigne par V l'angle sous lequel le rayon vecteur PM coupe la courbe mobile, on a

$$p = r \sin V;$$

donc

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{1 - m^2} \times \frac{1}{\sin V}.$$

Or $d\sigma \sin V$ représente la projection de l'arc élémentaire de roulette sur la base; donc :

Lorsqu'une épicycloïde roule sur une droite, le centre de son cercle directeur décrit une courbe telle que la projection d'un arc quelconque sur la base est proportionnelle à l'arc correspondant de l'épicycloïde.

Nous avons vu plus haut que cette roulette est une ellipse. L'équation tangentielle d'une spirale sinusoïde étant

$$p^m = a^m \sin m\varphi,$$

on en tire par différentiation

$$p^{m-1}p' = a^m \cos m\varphi,$$

puis

$$r^2 = p^2 + p'^2 = \frac{p^2}{\sin^2 m\varphi} = \frac{a^{2m}}{p^{2(m-1)}};$$

d'où

$$r^2 p^{2(m-1)} = a^{2m},$$

et par différentiation

$$p\,dr + (m-1)\,r\,dp = 0;$$

donc

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dp}{dr} = \frac{1}{1-m}\,\frac{p}{r};$$

et, en remplaçant p par $r \sin V$,

$$d\sigma = \frac{\sin V}{1-m}\,ds.$$

Mais $ds \sin V$ représente la projection, sur l'arc de la roulette, de l'élément d'arc de la courbe roulante; ou, ce qui est la même chose, de l'élément de la base. D'autre part, on sait que, lorsqu'une spirale sinusoïde roule sur une droite, son pôle décrit une courbe de Ribeaucour. On a donc, pour cette dernière courbe, la propriété suivante :

Les normales aux extrémités d'un arc infiniment petit d'une courbe de Ribeaucour découpent sur la base un élément dont la projection sur cet arc lui est proportionnelle.

Quadrature. — L'aire comprise entre un arc de roulette, les ordonnées de ses extrémités et la base a pour expression

$$\Sigma = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx;$$

ou bien, en vertu des formules fondamentales,

$$\Sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p^2\,d\varphi.$$

Or, l'aire correspondante de la podaire est égale à

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p^2\,d\varphi;$$

d'où ce théorème dû à Steiner :

La surface comprise entre un arc de roulette, les ordonnées extrêmes et la base est double de la surface correspondante de la podaire.

Mais, en dehors de l'aire précédente, on peut en considérer une autre liée à la roulette; c'est celle qui est balayée par le rayon vecteur PM pendant le déplacement de la courbe mobile; autrement dit, c'est celle qui est limitée par l'arc de la roulette, les normales à ses extrémités et le segment de la base compris entre ces normales.

Soient PM et P'M' deux positions infiniment voisines du rayon vecteur. Le quadrilatère mixtiligne PP'M'M est égal à la somme de deux secteurs. Le premier a pour sommet le point P, pour base l'élément de la courbe mobile; son expression est $\frac{1}{2} p\, ds$. car il peut être remplacé par un triangle de base ds et de hauteur p. Le second a pour sommet le point M, pour base l'élément de roulette; son expression est $\frac{1}{2} r\, d\sigma$, puisque la roulette est normale à PM. On a donc

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2} p\, ds + \frac{1}{2} r\, d\sigma.$$

Mais

$$d\sigma = \frac{r}{\rho} ds;$$

par suite

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2}\left(p + \frac{r^2}{\rho}\right) ds.$$

Supposons que la courbe appartienne à la famille définie par la relation

$$\frac{r}{\rho} = \mathrm{K};$$

à cause de

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp},$$

on aura

$$\mathrm{K}r = p + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.});$$

d'où

$$d\Sigma_1 = p\,ds + \frac{1}{2}\,\alpha\,ds.$$

Lorsqu'une courbe définie par la relation $\frac{r}{\rho} = \mathrm{K}$ *roule sur une droite, l'aire balayée par la normale est telle que son excès sur le double du secteur correspondant de la courbe mobile est proportionnel à la longueur de l'arc de celle-ci.*

L'élément d'aire $d\Sigma_1$ peut encore s'écrire

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2}\left(p + r\,\frac{dp}{dr}\right)ds.$$

Si la courbe roulante est une spirale sinusoïde, on a (*voir* plus haut)

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{1-m}\,\frac{p}{r};$$

par suite,

$$d\Sigma_1 = \frac{m-2}{2(m-1)}\,p\,ds.$$

Mais $\frac{1}{2}\,p\,ds$ représente l'élément de surface de la courbe mobile. Donc :

Lorsqu'on fait rouler une spirale sinusoïde sur une droite, la courbe de Ribeaucour engendrée par son pôle est telle que la surface comprise entre un de ses arcs, les normales aux deux extrémités et la base, est proportionnelle à la surface du secteur correspondant de la spirale.

Courbure. — L'expression connue du rayon de

courbure R de la roulette,

$$R = \frac{d\sigma^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

se met facilement, au moyen des formules fondamentales, sous la forme

$$R = \frac{(p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{pp'' - p'^2}.$$

A son tour celle-ci est susceptible de nombreuses transformations. On peut l'écrire

$$(9) \qquad R = \frac{(p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{p(p + p'') - (p^2 + p'^2)}.$$

et, puisque

$$p^2 + p'^2 = r^2, \qquad p + p'' = \rho,$$

on aura

$$(10) \qquad R = \frac{r^3}{p\rho - r^2}.$$

En remplaçant p par $r \sin V$, on trouve

$$(11) \qquad R = \frac{r^2}{\rho \sin V - r}.$$

En substituant dans (10) $\frac{r\,dr}{dp}$ à ρ, on obtient

$$(12) \qquad R = \frac{r^2\,dp}{p\,dr - r\,dp}.$$

La formule (11) peut encore se transformer comme il suit :

$$(13) \qquad \left(\frac{1}{R + r} - \frac{1}{r}\right) \sin V + \frac{1}{\rho} = 0.$$

Soit C le centre de courbure de la courbe mobile, correspondant au point de contact M; le cercle décrit

sur MC comme diamètre coupe PM en γ. On a

$$M\gamma = \rho \sin V;$$

d'où, en vertu de (11),

$$R = \frac{r^2}{P\gamma}. \tag{14}$$

Cette dernière formule donne la construction suivante pour le centre de courbure de la roulette :

Tirer PC *jusqu'à son point de rencontre avec la perpendiculaire élevée en* M *à* PM; *par celui-ci mener une perpendiculaire à la base. Cette perpendiculaire coupe* PM *au centre de courbure cherché.*

La relation (11) peut encore s'écrire

$$\frac{1}{R} = \frac{\rho \sin V}{r^2} - \frac{1}{r}.$$

D'autre part, le rayon de courbure de la podaire, lieu du point Q, a pour expression connue

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{r} - \frac{\rho \sin V}{r^2};$$

d'où par addition

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}.$$

De cette relation on peut déduire le théorème de Habich, que nous avons démontré ci-dessus.

Les valeurs (10), (11), (12), (13), (14) du rayon de courbure R sont au fond équivalentes; mais elles permettent de choisir, dans chaque cas particulier, celle qui convient le mieux au problème qu'on traite.

Si l'on veut que la roulette soit un cercle, on doit avoir, d'après (12),

$$\frac{r^2\,dp}{r\,dp - p\,dr} = a \qquad (a = \text{const.}).$$

ou bien

$$\frac{dp}{p} = \frac{a\,dr}{r(a-r)}.$$

En intégrant on trouve

$$p = \frac{cr}{a-r} \qquad (c = \text{constante arbitraire});$$

c'est l'équation de la courbe cherchée entre les variables p et r.

Si l'on fait rouler un cercle sur la base rectiligne, un point de sa circonférence décrit une cycloïde. La formule (14) donne immédiatement

$$R = 2PM.$$

Dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale.

Supposons que la courbe roulante appartienne à la famille caractérisée par la relation

$$\frac{r}{\rho} = K.$$

On a, en vertu de $\rho = \frac{r\,dr}{dp}$,

$$\frac{dp}{dr} = K, \qquad p = Kr + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.})$$

et la formule (12) donne

$$R = \frac{r^2}{\alpha},$$

ce qui fournit une construction du centre de courbure de la roulette. Si la courbe mobile est l'épicycloïde d'équation tangentielle

$$p = \alpha \sin m\varphi,$$

on a

$$p' = m\alpha \cos m\varphi, \qquad p'' = -m^2\alpha \sin m\varphi;$$
$$\rho = p + p'' = (1 - m^2)\alpha \sin m\varphi = (1 - m^2)p;$$
$$r^2 = p^2 + p'^2 = (1 - m^2)p^2 + m^2\alpha^2.$$

En portant ces valeurs dans (10), on obtient

$$R = -\frac{r^3}{m^2\alpha^2}.$$

Le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale. Les coniques seules jouissent de cette propriété.

Prenons enfin pour courbe roulante la spirale sinusoïde d'équation

$$p^m = a^m \sin m\varphi.$$

Nous avons vu plus haut que pour ces courbes on a la relation

$$\frac{dr}{dp} = \frac{(1 - m)r}{p};$$

et, comme $\rho = \frac{r\,dr}{dp}$,

$$\rho = \frac{(1 - m)r^2}{p}.$$

Or

$$p = r \sin V;$$

donc

$$\rho \sin V = (1 - m)r,$$

et, en portant cette valeur dans (11), on arrive à

$$R = \frac{r}{m}.$$

Le rayon de courbure est donc proportionnel à la normale. Cette propriété, généralisation d'une propriété classique de la cycloïde, caractérise les lignes de Ribeaucour.

Que faut-il pour que R soit infini ? En vertu de (11) on doit avoir

$$\rho \sin V = r.$$

Mais cette relation n'a lieu que pour les points du cercle décrit sur le rayon de courbure de la courbe roulante comme diamètre. Tous les points de ce cercle se trouvent donc en un point d'inflexion de leur trajectoire; d'où le nom de *cercle des inflexions* qui lui a été donné.

Passons à l'étude de la courbure d'une roulette tangentielle, c'est-à-dire de la courbe enveloppée par une droite entraînée dans le déplacement de la courbe mobile.

On a vu plus haut que l'équation de la droite PX était

$$(15) \qquad \left(x - \int p\, d\varphi\right) \cos\varphi - (y - p) \sin\varphi = 0.$$

En dérivant deux fois on obtient

$$(16) \qquad x \sin\varphi + y \cos\varphi - s \sin\varphi = 0,$$

$$(17) \qquad x \cos\varphi - y \sin\varphi - \rho \sin\varphi - s \cos\varphi = 0.$$

L'équation (16) nous montre que le point de contact de la droite avec son enveloppe s'obtient en menant par M une perpendiculaire à PX. Soit N ce point. L'équation (17) prouve que le centre de courbure de la roulette tangentielle est à l'intersection de MN et de la parallèle à PX menée par le symétrique C_1 du centre de courbure C, par rapport à la base.

Les équations (15) et (16) donnent, pour les coordonnées de N,

$$x = s - (p \sin\varphi + p' \cos\varphi) \cos\varphi,$$

$$y = (p \sin\varphi + p' \cos\varphi) \sin\varphi.$$

Mais on a

$$MN = p \sin\varphi + p' \cos\varphi;$$

en désignant cette quantité par q on obtient, pour x et y,

$$x = s - q \cos\varphi, \qquad y = q \sin\varphi.$$

Des équations (16) et (17) on déduit, pour les coordonnées du centre de courbure v,

$$\xi = s + \rho \sin\varphi \cos\varphi, \qquad \eta = -\rho \sin^2\varphi.$$

Par suite, si l'on appelle R_1 et σ_1 le rayon de courbure et l'arc de la roulette tangentielle, on a

$$R_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (q + \rho \sin\varphi)^2,$$
$$d\sigma_1 = R_1 d\varphi = \left(\sin\varphi + \frac{q}{\rho}\right) ds;$$

la première de ces formules résulte évidemment de la construction que nous venons de donner du centre de courbure.

Cette construction montre aussi que les centres de courbure des courbes enveloppées par les différentes droites entraînées par la courbe mobile sont sur le cercle décrit sur MC_1 comme diamètre. Il a reçu le nom de *cercle des rebroussements :* c'est le lieu des points de rebroussement qui se présentent, à un instant donné, sur toutes les roulettes tangentielles; et l'on peut noter que toutes les tangentes de rebroussement concourent en C_1.

Si la courbe mobile est un cercle, on a, pour la roulette tangentielle d'un de ses diamètres,

$$x = \frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi);$$

c'est une cycloïde.

Si c'est une courbe de Ribeaucour, on sait que sa

directrice détache sur la normale un segment égal à $K\rho$. Mais $q = K\rho \sin\varphi$, donc

$$R_1 = \frac{K+1}{K} q;$$

par conséquent la roulette tangentielle enveloppée par la directrice est aussi une courbe de Ribeaucour.

En particulier pour $K = -\frac{1}{2}$, ce qui correspond à la parabole, on a $R_1 = -q$; ce qui caractérise la chaînette.

La directrice d'une parabole qui roule sur une droite enveloppe une chaînette.

II. — Glissettes.

Formules fondamentales. — Lorsqu'une courbe plane de forme invariable se déplace en restant tangente à deux courbes fixes données, un point, qui lui est invariablement lié, décrit une courbe appelée *glissette*. Par exemple, si une ellipse, de grandeur constante, reste constamment tangente à deux droites, son centre, ses foyers, ses sommets décrivent des glissettes. Il peut se faire que les courbes fixes soient des cercles, et même des cercles infiniment petits : c'est-à-dire des points. Comme cas encore plus particulier, on peut supposer que les deux points soient confondus, et alors on a une courbe, de forme invariable, qui se déplace en restant tangente à une droite, toujours au même point. Ainsi, si l'on considère toutes les paraboles égales, tangentes à une droite donnée, en un point donné, les lieux des foyers, des sommets, etc. sont des glissettes; les enveloppes des axes, des directrices, etc. sont des glissettes tangentielles.

D'ailleurs le problème des glissettes n'est pas distinct du problème des roulettes, comme le prouve le théorème bien connu suivant :

Les glissettes à base rectiligne d'une courbe donnée sont identiques aux roulettes, à base rectiligne, de la développée de cette courbe.

En effet, si une courbe de forme invariable se déplace en passant par deux points fixes, le centre instantané de rotation est à l'intersection des normales qu'on peut lui mener en ces deux points. Cela est vrai même si les deux points sont infiniment voisins. Mais alors le centre instantané se trouve sur la perpendiculaire élevée, par le point de contact, à la droite que touche la courbe mobile. Cette perpendiculaire est donc le lieu de ce centre dans le plan fixe. D'autre part, ce centre est constamment le point de rencontre de deux normales infiniment voisines. Le lieu qu'il décrit, dans le plan mobile, est donc la développée de la courbe mobile; ce qui démontre le théorème.

Cela posé, prenons un système d'axes rectangulaires Ox et Oy, formé par la droite donnée et sa normale au point de contact fixe O. Soit P le point, invariablement lié à la courbe mobile, dont on cherche le lieu. L'équation tangentielle polaire de cette courbe, rapportée au point P pris comme pôle, et à une droite arbitraire PX comme axe polaire, est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad [p = f(\varphi)].$$

Les coordonnées du point P sont

$$(18) \qquad x = OQ = p', \qquad y = PQ = p.$$

Par exemple, si la courbe mobile est une développante de cercle $p = a\varphi$, la glissette est la droite $x = a$.

Si c'est une spirale logarithmique, le pôle décrit la droite $x - my = 0$; si c'est un cercle de rayon a,

$$p = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - a;$$

on a

$$x = -\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi, \qquad y = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - a;$$

d'où

$$x^2 + (y - a)^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Le lieu est un cercle, résultat évident *a priori*.

Problème inverse des glissettes. — Les formules (18), qui donnent

$$p = y, \qquad p' = x,$$

le résolvent complètement. Après ce qui a été dit à propos des roulettes, sur ce sujet, il paraît inutile d'y revenir.

Enveloppe d'une droite. — L'équation de l'axe polaire, PX, étant

$$(19) \qquad (x - p')\cos\varphi + (y - p)\sin\varphi = 0,$$

l'équation tangentielle de la courbe qu'il enveloppe est

$$P = p \sin\varphi + p' \cos\varphi.$$

Pour trouver les coordonnées du point de contact, différentions (19); nous obtenons

$$(20) \qquad x \sin\varphi - (y - \rho)\cos\varphi = 0 \qquad (\rho = p + p').$$

De (19) et (20) on déduit

$$x = (p' \cos\varphi - p'' \sin\varphi)\cos\varphi,$$
$$y = p + (p' \sin\varphi + p'' \cos\varphi)\cos\varphi.$$

L'équation (20) montre que le point de contact est

à l'intersection de l'axe PX et de la perpendiculaire abaissée sur lui, par le centre de courbure de la courbe mobile.

Rectification. — On a évidemment

$$ds = \sqrt{p'^2 + p''^2}\, d\varphi = r_1\, d\varphi\,;$$

r_1 désignant le rayon vecteur allant du point décrivant au centre de courbure de la courbe mobile. On retombe donc sur la formule de la théorie des roulettes où r est remplacé par r_1. C'est un résultat auquel on devait s'attendre d'après ce qui a été dit plus haut.

Quadrature. — L'aire comprise entre un arc de la glissette, les deux ordonnées extrêmes et la base a pour expression

$$\Sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} pp''\, d\varphi.$$

Cette formule ne paraît pas conduire à des résultats intéressants; mais, si l'on remplace l'axe des x par l'axe des y, l'aire analogue a pour expression

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p'^2\, d\varphi\,;$$

c'est-à-dire qu'elle est le double de la surface correspondante de la podaire de la développée de la courbe mobile : résultat conforme à celui qui a été trouvé dans la théorie des roulettes.

Courbure. — L'expression du rayon de courbure de la glissette se met aisément sous la forme

$$R_1 = \frac{r_1^3}{p'\varphi_1 - r_1^2},$$

qui est identique à celle trouvée pour le rayon de courbure d'une roulette, à condition de remplacer les éléments de la courbe mobile par ceux de sa développée.

Quant aux coordonnées du centre de courbure d'une glissette tangentielle, on les obtient en différentiant (20), ce qui donne

$$(21) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho\sin\varphi + \rho_1\cos\varphi = 0$$

et en résolvant (20) et (21). On trouve ainsi

$$\xi = -\rho_1\cos^2\varphi, \qquad \eta = \rho - \rho_1\sin\varphi\cos\varphi.$$

K¹5c]

NOTE SUR LA LEMOINIENNE;

PAR M. AURIC.

D'après un théorème bien connu, lorsque deux triangles T_1, T_2 sont homologiques, les points d'intersection des côtés non homologues sont sur une conique L que nous appellerons *lemoinienne*, parce que le premier cercle de Lemoine est un cas très particulier de cette proposition.

Nommons 1, 2, 3, 4, 5, 6 ces points d'intersection; avec les quinze droites qui les joignent deux à deux on peut former quinze triangles homologiques deux à deux.

Chacun de ces triangles est homologique à huit autres : ainsi T = 12.34.56 est homologique à

$$(1) \quad \begin{cases} T_2 = 14.25.36 & 13.26.45 & 13.25.46 & 14.26.35 \\ T_3 = 16.23.45 & 15.24.36 & 16.24.35 & 15.23.46 \end{cases}$$

Les six autres triangles ont un côté commun avec T_1 et ne lui sont pas proprement homologiques :

12.35.46	15.34.26	13.24.56
12.36.45	16.34.25	14.23.56

On peut grouper les triangles trois par trois, de façon qu'ils aient même centre d'homologie C et les trois axes d'homologie concourant en un point P. Un triangle tel que T_1 peut être ainsi groupé de quatre manières différentes suivant les colonnes du Tableau (1).

Prenons T_1 comme triangle de référence.

Appelons $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}$ les coordonnées barycentriques du centre d'homologie C, commun à T_1, T_2, T_3 et soit

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$$

l'équation de l'axe d'homologie de T_2 et T_3 ou Δ_{23}.

La lemoinienne L aura pour équation

$$\Sigma (m_1^2 - n_1^2) x_1^2 - 2(m_2 m_3 + n_2 n_3) x_2 x_3 = 0$$

ou

$$\Sigma m_1^2 x_1^2 - 2 m_2 m_3 x_2 x_3 - (\Sigma n_1 x_1)^2 = 0.$$

Sous cette forme on voit immédiatement que L est bitangente à une conique inscrite dans T_1, les points de contact avec les côtés de T_1 étant les pieds des céviennes de C et la corde de contact étant l'axe Δ_{23}.

Les deux autres axes d'homologie sont

$$\Delta_{12} : \quad \Sigma (m_1 - n_1) x_1 = 0,$$
$$\Delta_{13} : \quad \Sigma (m_1 + n_1) x_1 = 0.$$

Les trois axes Δ_{12}, Δ_{23}, Δ_{31} forment donc un faisceau harmonique avec la polaire trilinéaire de C par rapport à T_1 dont l'équation est

$$\Sigma m_1 x_1 = 0.$$

La polaire de C par rapport à L s'écrit

$$\Sigma m_1 x_1 + \sum \frac{n_1}{m_1} \sum n_1 x_1 = 0;$$

elle passe également par le sommet du faisceau ci-dessus défini.

Nous obtenons ainsi sept droites concourantes savoir: les trois axes d'homologie qui sont également les cordes de contact, les polaires trilinéaires de C par rapport aux triangles T_1, T_2, T_3 qui sont les conjugués harmoniques d'un axe par rapport aux deux autres et enfin la polaire de C par rapport à L.

La lemoinienne est, en définitive, bitangente à soixante coniques inscrites par groupes de quatre dans chacun des quinze triangles, les points de contact avec les côtés étant les pieds des céviennes du centre d'homologie correspondant. Ces coniques et les triangles correspondants peuvent être groupés par trois, de manière que la corde de contact soit l'axe d'homologie des deux autres triangles du groupe.

La lemoinienne s'écrit

$$\begin{aligned}&\Sigma x_1 \Sigma (m_1^2 - n_1^2) x_1 \\ &\quad = \Sigma (m_2 - m_3 + n_2 - n_3)(m_2 + m_3 - n_2 + n_3) x_2 x_3,\end{aligned}$$

elle est donc homothétique à la conique circonscrite représentée par le second membre.

En particulier, si Δ_{12} est la droite de l'infini

$$\Sigma x_i = 0, \qquad m_i - n_i = \text{const.},$$

et cette conique devient

$$\Sigma m_2 m_3 x_2 x_3 = 0.$$

Si C est le point de Lemoine

$$\frac{1}{m_i} = a_i^2$$

et la conique

$$\Sigma a_1^2 x_2 x_3 = 0$$

est le cercle circonscrit comme on devait s'y attendre, puisque dans ce cas la lemoinienne est un cercle.

La lemoinienne s'écrit également

$$\Sigma(m_1 + n_1)x_1 \Sigma(m_1 - n_1)x_1 = 4\Sigma m_2 m_3 x_2 x_3.$$

On en déduit la proposition :

Les points d'intersection des deux axes Δ_{12}, Δ_{13} *avec* L *sont sur une conique circonscrite à* T_1 *qui est précisément l'inverse de la polaire trilinéaire de* C

$$\sum \frac{1}{m_1 x_1} = 0.$$

Si l'on appelle q_1, q_2, q_3 les coordonnées du pôle Q de Δ_{23} par rapport à L on a

$$q_1 = m_2 n_3 + m_3 n_2,$$
$$q_2 = m_3 n_1 + m_1 n_3,$$
$$q_3 = m_1 n_2 + m_2 n_1.$$

Les coordonnées du centre de L sont

$$q_1(q_1 - q_2 + q_3) - 2k(m_2 + m_3),$$
$$q_2(q_1 + q_2 + q_3) - 2k(m_3 - m_1),$$
$$q_3(q_1 + q_2 + q_3) - 2k(m_1 - m_2)$$

avec

$$k = m_1 m_2 m_3 + m_1 n_2 n_3 + m_2 n_3 n_1 + m_3 n_1 n_2.$$

L'équation tangentielle de L est

$$(q_1 u_1 + q_2 u_2 - q_3 u_3)^2 - 4k\Sigma m_1 u_2 u_3 = 0.$$

[L²11]

COURBURE MOYENNE DE L'ELLIPSOÏDE ET DU CYLINDRE ELLIPTIQUE, EXPRIMÉE A L'AIDE DES FONCTIONS DE LAMÉ ;

PAR M. B. GLOBA-MIKHAÏLENKO.

1. En considérant :

L'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0 \tag{1}$$

et prenant pour coordonnées elliptiques les racines positives u et v de l'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=0.$$

M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 379) donne les expressions suivantes pour les rayons principaux de la courbure de l'ellipsoïde :

$$\rho=-\frac{u\sqrt{uv}}{\sqrt{abc}},\qquad \rho'=-\frac{v\sqrt{uv}}{\sqrt{abc}},$$

d'où l'on déduit la courbure moyenne

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=-\sqrt{abc}\,\frac{u+v}{(uv)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

L'identité bien connue

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=\frac{\lambda(\lambda-u)(\lambda-v)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)},$$

que nous écrivons, en tenant compte de l'équation (1),

$$\begin{aligned}\lambda^2&-(a+b+c-x^2-y^2-z^2)\lambda\\&+ab+ac+bc-(b+c)x^2-(a+c)y^2-(a+b)z^2\\&=(\lambda-u)(\lambda-v),\end{aligned}$$

nous donne

$$u + v = a + b + c - x^2 - y^2 - z^2,$$
$$uv = ab + bc + ac - (b + c)x^2 - (a + c)y^2 - (a - b)z^2,$$

et en tenant compte de (1) on a

$$uv = \frac{bc}{a}x^2 + \frac{ac}{b}y^2 + \frac{ab}{c}z^2.$$

Substituant ces expressions dans (2) on a la courbure moyenne

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -\sqrt{abc}\,\frac{a + b + c - x^2 - y^2 - z^2}{\left(\frac{bc}{a}x^2 + \frac{ac}{b}y^2 + \frac{ab}{c}z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Écrivons maintenant cette formule avec les notations de Poincaré (*Figures d'équilibre d'une masse fluide*, leçons professées en 1900, ou *Acta mathematica*, t. VII). Dans ces notations, pour les coordonnées elliptiques dans l'espace, on prend les racines ρ, μ, ν de l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a_1^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b_1^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c_1^2} = 1.$$

Les fonctions de Lamé R_i, M_i, N_i s'écrivent

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - a_1^2}, \qquad R_2 = \sqrt{\rho^2 - b_1^2}, \qquad R_3 = \sqrt{\rho^2 - c_1^2},$$
$$R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b_1^2)(\rho^2 - c_1^2)}, \qquad R_5 = \sqrt{(\rho^2 + c_1^2)(\rho^2 - a_1^2)},$$
$$R_6 = \sqrt{(\rho^2 - a_1^2)(\rho^2 - b_1^2)}, \qquad \ldots.$$

M_i et N_i s'obtiennent en remplaçant successivement ρ par μ et ν.

L'équation de l'ellipsoïde sera alors

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} - 1 = 0.$$

Ensuite, posant

$$h_1^2 = (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 - c_1^2),$$
$$h_2^2 = (b_1^2 + a_1^2)(b_1^2 - c_1^2),$$
$$h_3^2 = (c_1^2 - a_1^2)(c_1^2 - b_1^2),$$

on a

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1, \qquad y = h_2 R_2 M_2 N_2, \qquad z = h_3 R_3 M_3 N_3;$$

enfin, comparant avec les notations de M. Darboux, on a

$$a = R_1^2, \qquad b = R_2^2, \qquad c = R_3^2,$$

et la formule (3) s'écrit

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -R_1 R_2 R_3 \frac{R_1^2 - R_2^2 + R_3^2 - x^2 - y^2 - z^2}{\left(\frac{R_2^2 R_3^2}{R_1^2} x^2 + \frac{R_1^2 R_3^2}{R_2^2} y^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^2} z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçant x, y, z dans le dénominateur par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = R_1 R_2 R_3 \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - x^2 - y^2 - z^2}{(h_1^2 M_1^2 N_1^2 R_4^2 + h_2^2 M_2^2 N_2^2 R_5^2 + h_3^2 M_3^2 N_3^2 R_6^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais, dans ces notations, les cosinus de la normale avec les axes coordonnées sont

$$\cos(n, x) = l h_1 M_1 N_1 R_4,$$
$$\cos(n, y) = l h_2 M_2 N_2 R_5,$$
$$\cos(n, z) = l h_3 M_3 N_3 R_6,$$

où l'on pose

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}} = \frac{P}{R_1 R_2 R_3},$$

P étant la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde au point (x, y, z).

Remarquant, de plus, que le volume de l'ellipsoïde est

$$T = \frac{4}{3} \pi R_1 R_2 R_3$$

et désignant par

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$$

le carré de la diagonale du parallélépipède construit sur les demi-axes, et par

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

le carré du rayon vecteur du point (x, y, z), nous aurons définitivement

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -\frac{3}{4\pi} T(R^2 - r^2) l^3 = -\frac{16\pi^2}{9T^2}(R^2 - r^2) P^3.$$

3. Pour le cylindre elliptique, un des rayons principaux de courbure est infini, et la courbure moyenne se ramène à la courbure de l'ellipse de la section droite. Employant des notations analogues à celles de Poincaré (*Comptes rendus*, t. 159, p. 646) on a

$$x = hR_1M_1, \quad y = hR_2M_2, \quad hM_1 = \sin\nu, \quad hM_2 = \cos\nu,$$
$$\cos(n, x) = hlM_1R_2, \quad \cos(n, y) = hlM_2R_1;$$

l'aire de l'ellipse est

$$A = \pi R_1 R_2.$$

Portant ces valeurs dans la formule connue

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on trouve

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{h^2 R_1 R_2 (M_2^2 + M_1^2)}{(h^2 R_1^2 M_2^2 + h^2 R_2^2 M_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\pi} A l^3 - \frac{\pi^2}{A^2} P^3,$$

P désignant toujours la distance du centre à la tangente au point (x, y).

CORRESPONDANCE.

M. Auric. — *Au sujet du système d'équations* $x^2 + y^2 = z^2$, $x + y^2 = t^2$. — Il semble que la solution

donnée par Euler pour x, y, z, t rationnels et qui est rappelée dans un article récent (1915, p. 106) n'est pas la solution la plus générale.

En effet, chercher les solutions rationnelles du système non homogène proposé revient à chercher les solutions entières du système homogène équivalent

$$x^2 + uy = z^2, \qquad ux + y^2 = t^2.$$

Or, la résolution de ce système est immédiate, car en retranchant on a

$$(x - y)(x + y - u) = z^2 - t^2 = pq.$$

On peut se donner *a priori* z, t, u; on en déduira toutes les solutions acceptables pour x et y en choisissant convenablement la parité de p et de q d'après celle de u; il est clair en effet que p et q doivent être de même parité si u est pair, et de parité différente si u est impair.

Soit le premier exemple

$$z = 17, \qquad t = 16, \qquad u = 12;$$

on a

$$\begin{aligned}(x - y)(x + y - 12) &= 33 = 1, 33 \\ &= 3, 11 = (-1)(-33) = (-3)(-11);\end{aligned}$$

d'où les huit solutions :

$$\begin{aligned} x &= 23,\ 13,\quad 23,\ 13,\ -11,\ -1,\quad -11,\quad 1, \\ y &= 22,\ 10,\ -10,\ 2,\ -10,\quad 2,\quad 22,\quad 10. \end{aligned}$$

En résumé, la solution d'Euler dépend de deux indéterminées $z - x$ et $t - y$, tandis que la solution ci-dessus dépend de trois arbitraires z, t, u.

M. Ph. du Plessis. — Les expressions des rayons de courbure de la néphroïde et de la cardioïde, obtenues

récemment par M. Balitrand (*N. A.*, 1915, p. 102 et 217) au moyen de procédés spéciaux, sont l'une et l'autre une conséquence tout à fait immédiate de la construction générale du rayon de courbure de toute épicycloïde, dite de Savary.

En effet, si l'on considère l'épicycloïde engendrée par le point M du cercle C_1, de centre O_1 et de rayon r_1, roulant sur le cercle C, de centre O et de rayon r, et si, dans une position quelconque, les deux cercles se touchant en I, le point M′ est diamétralement opposé à M dans le cercle C_1, la normale à l'épicycloïde en M est MI (Chasles) et le centre de courbure m est à la rencontre de cette normale et de la droite OM′ (Savary).

Or, le triangle MIO_1 coupé par la transversale OmM donne

$$\frac{OI.mM.M'O_1}{OO_1.mI.M'M} = 1,$$

ou

$$\frac{r}{r+r_1}\,\frac{mM}{mI}\,\frac{1}{2} = 1;$$

d'où

$$\frac{mM}{mI} = \frac{2(r+r_1)}{r},$$

ou encore

$$\frac{mM}{IM} = \frac{2(r+r_1)}{r+2r_1}.$$

Pour la néphroïde, on a $r_1 = \frac{r}{2}$ et, par suite,

$$\frac{mM}{IM} = \frac{3}{2};$$

pour la cardioïde, $r_1 = r$ et

$$\frac{mM}{IM} = \frac{4}{3}.$$

Ce sont les résultats retrouvés par M. Balitrand.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Besançon.

Épreuve théorique. — I. Questions de cours. — *Former l'équation différentielle des courbes funiculaires d'un système plan continu de charges parallèles. En déduire une méthode pour l'étude de la résistance d'une poutre droite soumise à des charges pesantes quelconques, en se limitant au cas de deux appuis.*

II. Problèmes. — A. *Un cylindre élastique isotrope est soumis sur ses bases à une traction normale uniformément répartie; on connaît d'une part le rapport* η *de la traction par unité de surface à la dilatation cubique du cylindre, d'autre part le rapport* ε *de la dilatation cubique à la dilatation linéaire longitudinale; calculer les coefficients* λ *et* μ *de Lamé.*

B. *Si, conformément aux indications de l'expérience de Thomson, on admet qu'aux différents points d'un courant gazeux* en régime lent et permanent *la température t varie avec la pression p conformément à la loi suivante*

$$C\frac{\Delta t}{\Delta p} = \frac{K}{T^2},$$

où K *est une constante caractéristique du gaz,* T *sa température absolue et* C *la chaleur spécifique à pression constante, on demande* quelle sera la forme la plus générale de la relation caractéristique *du gaz entre sa pression p, son volume v et sa température absolue* T.

Épreuve pratique. — *Le mouvement pendulaire d'un système oscillant est troublé par une résistance qu'on* prévoit *proportionnelle à la vitesse. On observe la semi-amplitude de l'oscillation au départ* U_0 *et la semi-amplitude* U_{10} *à la fin de la dixième oscillation simple. Ces mesures ont été effectuées sur deux séries d'observations*

caractérisées par deux valeurs très différentes de la semi-amplitude; on a ainsi observé :

	U_0.	U_{10}.
Pour la première série.....	192	52,3
Pour la deuxième série.....	13,8	3,7

1° *Vérifier si ces mesures concordent avec la loi de résistance admise;*

2° *Calculer la réduction proportionnelle d'une semi-amplitude qui est produite dans le cours d'une oscillation simple;*

3° *Connaissant la durée d'une oscillation simple* $24^s,25$, *calculer le coefficient d'amortissement du système oscillant.* (Juillet 1911.)

Question de Cours. — *Montrer comment les coefficients* λ *et* μ *de l'élasticité d'un corps homogène et isotrope peuvent être déterminés par l'observation :*

1° *De la déformation et du coefficient d'élasticité longitudinale d'un* prisme *uniformément tendu;*

2° *De la déformation et du coefficient d'élasticité radiale d'une* sphère pleine *soumise à une pression normale connue.*

Problème. — *Si l'on soumet à l'action d'un vent de vitesse* V *un disque circulaire dont le plan fait l'angle* θ *avec la direction du vent, on peut admettre que la pression exercée par le vent normalement à la surface* S *du disque et appliquée au centre du disque est proportionnelle au produit de* $\sin\theta$ *multiplié par le carré de l'excès de la vitesse* V *du vent sur la composante* u *parallèle au vent de la vitesse du centre du disque préalablement décomposée suivant deux directions dont l'une est parallèle au vent et l'autre parallèle au plan du disque. Désignons cette pression par*

$$KS(V-u)^2\sin\theta$$

avec un coefficient K *déterminé par l'expérience.*

Par une tige mince sur laquelle l'action du vent est négligeable, le disque circulaire est relié à un axe hori-

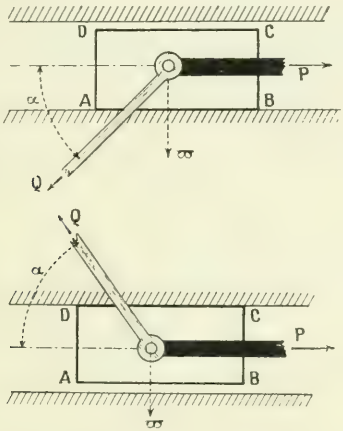
zontal de rotation situé dans son plan, mais perpendiculaire à la vitesse du vent supposée elle-même horizontale.

On demande :

1° *D'étudier l'équilibre de cet appareil sous la double action de la pesanteur et du vent;*

2° *D'étudier et de discuter les petits déplacements de ce pendule autour de sa position d'équilibre.*

Épreuve pratique. — *Une* coquille *rectangulaire de dimensions* AB $= 2a$ *et* BC $= 2b$, *guidée par une glissière*



horizontale, est soumise à une puissance P *parallèle à la glissière et à une* résistance Q *transmise par une bielle : ces deux forces et le* poids ϖ *de la coquille sont appliqués en un même point. On connaît le coefficient de frottement entre la coquille et la glissière f et l'on demande :*

1° *La condition que doivent remplir les dimensions de la coquille pour que celle-ci soit appuyée sur la glissière par la surface entière de l'une de ses bases (supérieure ou inférieure);*

2° *La condition, pour une inclinaison donnée* α *de la résistance* Q, *de l'équilibre de la coquille;*

3° *Pour une valeur donnée de* P, *le minimum en valeur absolue des inclinaisons* α *qui sont compatibles avec le précédent équilibre.* (Juin 1912.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2229.

(1914, p. 432.)

Soit MNP *le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales à une ellipse* (E) *issues d'un point* A *de cette ellipse. Démontrer que les six centres de courbure des coniques homofocales à* (E) *qui se croisent deux à deux en* M, N, P, *relatifs à ces points, sont sur la tangente en* A *à l'ellipse* (E). F. BALITRAND.

SOLUTION.

Par M. J. LEMAIRE.

On sait que, si d'un point M on mène deux tangentes à une conique (E) de centre O qu'elles touchent en A et B, le cercle MAB passe au pôle M′ de la sécante A′B′ commune à ce cercle et à cette conique, et conjuguée de AB; l'angle $\widehat{MOM'}$ a pour bissectrice l'axe focal de (E), et l'on a

$$OM \times OM' = c^2,$$

c désignant la demi-distance focale.

Par conséquent, M restant fixe, si l'on considère toutes les coniques homofocales à (E), le point M′ reste aussi fixe; le point commun aux normales aux points tels que A et B de ces coniques, étant diamétralement opposé à M sur le cercle, décrit la perpendiculaire en M′ à MM′; cette droite Δ contient en particulier les centres de courbure en M aux deux coniques du faisceau qui passent par ce point.

Si le point de concours des normales en A et B à (E) est sur cette conique, en A′ par exemple (qui est ainsi le point A de l'énoncé), la tangente en A′, qui passe en M′, et est perpendiculaire à MM′ est précisément la droite Δ, ce qui établit la proposition.

Autres solutions, par M. E.-N. BARISIEN et par M. F. DE LÉPINAY.

2230.

1914, p. 432.

Déterminer les courbes planes (M), *telles que les droites joignant les différents points de* (M) *aux centres de courbure correspondants de la développée, soient parallèles entre elles.* F. Balitrand.

SOLUTION.

Par M. R. Bouvaist.

Soit $x \sin\varphi - y \cos\varphi - p(\varphi) = 0$ une tangente à la courbe cherchée; les coordonnées d'un point de cette courbe sont

$$\begin{cases} x = p \sin\varphi + p' \cos\varphi, \\ y = p \cos\varphi - p' \sin\varphi; \end{cases}$$

les coordonnées du centre de courbure correspondant de la développée sont

$$\begin{cases} x = -(p'' \sin\varphi + p''' \cos\varphi), \\ y = -p'' \cos\varphi + p''' \sin\varphi; \end{cases}$$

écrivons que la droite joignant ces deux points est parallèle à Ox; il vient

$$\frac{p' + p'''}{p + p''} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

ou

$$p'' + p = k \cos\varphi.$$

L'intégrale générale de cette dernière équation est

$$p = \frac{k}{2} \varphi \sin\varphi + C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi.$$

Si l'on transporte l'origine au point

$$x = C_1, \qquad y = C_2,$$

les équations des courbes cherchées seront donc

$$\begin{cases} x = \frac{k}{2} (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi), \\ y = -\frac{k}{2} \sin^2\varphi. \end{cases}$$

QUESTIONS.

1704 *bis*. Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, le centre du cercle circonscrit à ce triangle décrit une conique. Examiner, en particulier, les cas où cette conique est un cercle ou un système de deux droites [1]. WEILL.

2249. En chaque point M d'une courbe donnée on mène la tangente, et l'on prend sur cette tangente une longueur MT égale au rayon de courbure de la courbe donnée en M; on demande de construire la tangente et le centre de courbure de la courbe, lieu du point T, quand M décrit la courbe donnée. F. BALITRAND.

2250. Étant donnés une courbe plane (M) et un point fixe O de son plan; de chaque point M de (M), avec MO pour rayon, on décrit un cercle qui coupe en P et Q la tangente et la normale en M à la courbe (M). Trouver : 1° le point où la droite PQ touche son enveloppe; 2° le centre de courbure de cette enveloppe. F. BALITRAND.

ERRATA.

Page 131, ligne 14, *au lieu de* comme, *lire* connue.
Même page, ligne 22, *au lieu de* fonction, *lire* fraction.
Même page, ligne 23, *au lieu de* dénominales, *lire* dénominateurs.

[1] Troisième partie de la question 1704 (1895, p. 39). *Voir* ci-dessus, pp. 244, 246.

[L' 16]

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES;

PAR M. J. LEMAIRE.

1. Soient (H) une hyperbole équilatère, (S) un cercle, Ω et O leurs centres, A, B, C, D leurs points communs, K et D′ les points diamétralement opposés à D sur ces courbes (*fig.* 1) : les sécantes communes BC et AD ayant des directions symétriques par rapport aux axes de (H), BC et AD′ ont des directions symé-

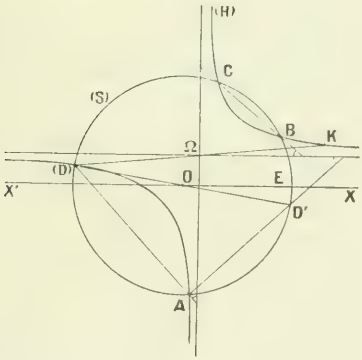


Fig. 1.

triques par rapport aux asymptotes; comme cette propriété subsiste si l'on projette orthogonalement la figure sur un plan parallèle à une asymptote de (H), on peut dire que :

Si une hyperbole équilatère (h) a ses asymptotes parallèles aux axes d'une ellipse (s), trois de leurs

points communs a, b, c, et le symétrique d' du quatrième par rapport au centre o de (s), sont sur un cercle.

En vertu du principe de continuité de Poncelet, nous considérerons ce théorème comme vrai pour toute conique (*s*), même quand elle n'est pas coupée par (*h*) en quatre points réels; la même remarque s'applique aux propositions qui vont suivre. Dans le cas de la parabole, le théorème précédent prend cette forme :

Si une hyperbole équilatère a un diamètre d'une parabole pour asymptote, le point de la parabole symétrique de celui qui appartient à ce diamètre et les points d'intersection à distance finie de ces deux courbes sont sur un cercle.

Lorsque, (*s*) étant une conique à centre, (*h*) contient ce centre, le premier théorème ci-dessus devient le théorème de Joachimsthal sur les normales issues d'un point à une conique à centre; si (*s*) est une parabole dont l'axe est une asymptote de (*h*), le second donne le théorème de Joachimsthal relatif à la parabole.

Les réciproques de ces deux théorèmes sont immédiates :

Trois des points communs à un cercle et à une conique à centre (s) et le symétrique du quatrième par rapport à ce centre sont sur une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de (s);

Trois des points communs à un cercle et à une parabole sont sur une hyperbole équilatère dont une asymptote est le diamètre de la parabole qui passe par le symétrique du quatrième point commun par rapport à l'axe.

On sait que si une sécante commune à une hyperbole équilatère et à un cercle est un diamètre pour l'une des courbes, la sécante conjuguée est un diamètre pour l'autre; projetant sur un plan parallèle à une asymptote et appliquant ce qui précède, nous voyons que :

Si une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes d'une conique la coupe en deux points b et d diamétralement opposés sur cette conique, les deux autres points communs a et c sont diamétralement opposés sur l'hyperbole, et les cercles acb, acd touchent en b et d la conique.

2. Soit E un point du cercle O situé sur la droite X'OX parallèle à une asymptote de (H) (*fig.* 1), M un point quelconque du cercle, M_1 le point tel que M soit le milieu de l'arc EM_1 : la corde EM_1 et la tangente en M se projettent sur un plan parallèle à X'X suivant des droites parallèles; em_1, projection de EM_1, est donc perpendiculaire à la normale en m à la conique (s).

Si A_1, B_1, C_1, D_1 sont les points qui correspondent à A, B, C, D comme M_1 à M, il est aisé de voir que, BC et AD étant symétriques en direction par rapport aux axes de (H) (*fig.* 1), B_1C_1 et A_1D_1 le sont par rapport aux asymptotes, propriété qui se conserve en projection orthogonale sur un plan parallèle à X'X, de sorte que a_1, b_1, c_1, d_1 sont sur un cercle. Cela est vrai aussi si l'on remplace E par une extrémité du diamètre du cercle O perpendiculaire à X'X; on a ainsi ce théorème, qui généralise un théorème dû à Joachimsthal :

Si quatre points d'une conique à centre sont sur

une hyperbole equilatère d'asymptotes parallèles aux axes, les points où elle est coupée par les perpendiculaires menées d'un sommet aux normales en ces points à la conique sont sur un cercle.

3. Le point K (*fig.* 1) étant l'orthocentre de ABC, le centre de gravité de ce triangle est le point G de OK situé au tiers de ce segment à partir de O; donc :

Si a, b, c, d désignent les points communs à une conique à centre (s) et à une hyperbole équilatère (h) d'asymptotes parallèles aux axes de (s), le centre de gravité g de abc est au tiers de ok à partir du centre (o) de (s), k étant le point diamétralement opposé à d sur (h) (fig. 2).

Par conséquent, les centres de gravité des quatre triangles ayant pour sommets trois des points a, b, c, d sont sur une hyperbole homothétique de (h) dans le rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant le centre de (s).

Dans le cas de la parabole, le théorème précédent prend cette forme :

Si une hyperbole équilatère a un diamètre d'une parabole pour asymptote, le centre de gravité du triangle des trois points communs à distance finie a pour ordonnée le tiers de celle du diamètre.

4. Désignons par f le quatrième point commun à (h) et au cercle $abcd$ (*fig.* 2), les droites bc et fa sont également inclinées sur les axes de (h), et par suite sur les bissectrices de l'angle $\widehat{yox}$ des axes de (s); il en résulte que $\widehat{oia} = \widehat{olb}$, i et l étant les points où fa et bc coupent respectivement ox et oy; mais a,

b, c, d' étant sur un cercle, on a aussi $\widehat{olb} = \widehat{ona}$, n étant le point commun à ad' et oy; par conséquent, $\widehat{oia} = \widehat{ona}$, le quadrilatère $oian$ est inscriptible dans un cercle, $\widehat{fad'}$ est droit, et l'on a ce théorème :

Le cercle $abcd'$ coupe (h) en un quatrième point f diamétralement opposé à d' sur ce cercle.

Le centre δ du cercle est le milieu de fd'; si h désigne l'orthocentre du triangle abc, et ω le centre

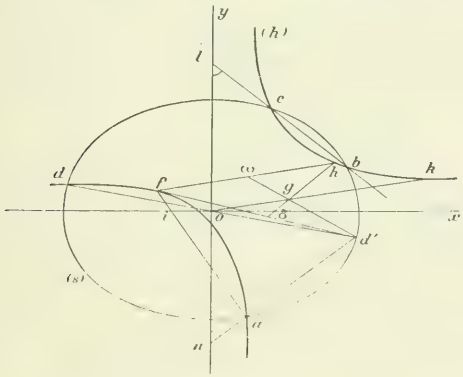


Fig. 2.

de (h), le centre de gravité g de abc est au tiers de δh à partir de δ, fh a son milieu en ω, $d'\omega$ passe en g : *les deux triangles abc et fhd' ont le même centre de gravité g.*

Nous avons déjà vu que, k étant diamétralement opposé à d sur (h), ok passe en g, et $og = \frac{ok}{3}$; les triangles $o\omega\delta$ et $kd'h$ sont inversement homothétiques dans le rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant g, et nous avons ce théorème :

Les centres de gravité des quatre triangles formés par les points communs à (s) *et à une hyperbole équilatère* (h) *d'asymptotes parallèles aux axes de* (s) *sont sur la conique* (s') *homothétique de* (s) *par rapport au centre* ω *de* (h), *le rapport d'homothétie étant égal à* $\frac{1}{3}$.

5. *Si* (h) *passe en* o, on sait que les normales à (s) en a, b, c, d concourent en un point p de (h); le premier des deux théorèmes ci-dessus montre que *le cercle de Joachimsthal* relatif au point d, c'est-à-dire le cercle $abcd'$, *coupe l'hyperbole d'Apollonius* (h) *au point* f *diamétralement opposé à* d' *sur ce cercle;* nous verrons plus loin que of est alors parallèle à la normale en d à la conique (s).

Nous avons vu que les centres de gravité des quatre triangles formés par les points a, b, c, d, pris trois à trois, sont d'une part sur une hyperbole équilatère (h'), homothétique de (h) dans le rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant le centre o de (s), et d'autre part sur une conique (s') homothétique de (s), dans le même rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant le centre ω de (h); (h') passe donc au centre o' de (s'), et les normales à (s') aux points communs à cette conique et à (h') concourent en un point qui est l'homologue, dans l'homothétie par rapport à ω, du point commun aux normales à (s) aux points a', b', c', d', diamétralement opposés à a, b, c, d, de sorte qu'on peut énoncer ce théorème :

Les centres de gravité des triangles formés par les pieds des normales issues d'un point p *à une conique* (s), *associés trois à trois, sont sur la*

conique (s') *homothétique de* (s) *par rapport au centre* ω *de l'hyperbole d'Apollonius* (h) *relative à* p, *dans le rapport* $\frac{1}{3}$; *les normales à* (s') *en ces centres de gravité concourent au point situé au tiers de* $\omega p'$, p' *étant symétrique de* p *par rapport au centre* o *de* (s).

6. *Formules de Desboves.* — Le quadrilatère normal circonscrit formé par les tangentes à (s) aux pieds des normales issues de p est déterminé dès que l'on connaît un de ses sommets; appelons m et n deux sommets opposés, pôles de bc et ad par rapport à (s), x_0, y_0 et x_1, y_1 leurs coordonnées rapportées aux axes de (s), que nous pourrons supposer être une ellipse de demi-axes a et b. Les directions ad et ad' étant conjuguées relativement à cette conique, les directions om et on sont telles que la symétrique de l'une par rapport aux axes, et l'autre, sont conjuguées; si donc m se déplace sur om supposée fixe, on reste aussi fixe; m et n décrivent dans ces conditions, sur ces deux droites, des divisions homographiques; il en est de même de leurs projections sur ox, de sorte que x_0 et x_1 sont liées par une relation linéaire : en considérant les cas où m vient en o, puis à l'infini sur la droite, puis sur la tangente à (s) en un sommet de l'axe focal, on trouve que cette relation se réduit à $x_0 x_1 = -a^2$; on aurait de même $y_0 y_1 = -b^2$: ce sont les formules de Desboves qui seront utilisées plus loin.

Relation entre ω *et* p. — Ces points se correspondent homographiquement, et leurs coordonnées (ξ, η) et (α, β) ont entre elles des relations de la

forme

$$\xi = \frac{A\alpha + B\beta + C}{A'\alpha + B'\beta + C'}, \qquad \eta = \frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}{A'\alpha + B'\beta + C'},$$

A, B, ..., C', constantes faciles à obtenir en considérant des positions particulières de p; on trouve ainsi

$$\xi = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \qquad \eta = -\frac{b^2\beta}{c^2};$$

par suite, $\frac{\eta}{\xi} \times \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b^2}{a^2}$, *la droite* $o\omega$ *et la droite isogonale de* op *relativement aux axes de la conique* (s) *sont conjuguées par rapport à cette conique.*

On vérifie que ω est sur la droite joignant les projections de p sur les axes, puisque $\frac{\xi}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta} = 1$; cette propriété résulte d'ailleurs de ce que ω et p appartiennent à l'hyperbole équilatère (h).

7. Rappelons que deux points m, n et les points b et c, a et d, où leurs polaires coupent une conique (s), appartiennent à une même conique, ou que si, par un point m et les points de contact b et c des tangentes à (s) issues de m, on fait passer une conique arbitraire, la sécante commune à cette conique et à (s), et conjuguée de bc, a son pôle n par rapport à (s) sur cette conique.

Considérons, en particulier, le cercle $mbc : mn$, polaire par rapport au cercle du point commun à bc et ad, est symédiane du triangle mbc; par suite, si r est le point où om coupe bc, rm et rn sont symétriques par rapport à bc.

Imaginons que, m restant fixe, (s) se déforme en conservant les mêmes foyers φ et φ', et considérons la conique infiniment aplatie qui se réduit au segment $\varphi\varphi'$:

mn reste fixe, et, si n' est la position particulière de n correspondante, comme r vient en o, on' est symétrique de om par rapport à $\varphi\varphi'$; mais il en est déjà ainsi de on, donc n et n' coïncident. Ainsi, *pour toutes les coniques de foyers* φ et φ', *le cercle* mbc *passe en un second point fixe* n; ce point est sur le cercle $m\varphi\varphi'$ et, si ce cercle coupe om en m', on a $om' = on$, et par suite

$$om \cdot on = om \cdot om' = o\varphi \times o\varphi' = c^2,$$

$2c$ désignant la distance $\varphi\varphi'$; dans ces mêmes conditions, bc bissectrice de $\widehat{mrn}$ enveloppe la parabole de foyer n et de directrice om; on peut énoncer les résultats suivants :

Pour que deux points m *et* n *et les points où leurs polaires par rapport à une conique* (s) *de centre* o *coupent cette courbe soient sur un cercle, il faut et il suffit que l'angle* $\widehat{mon}$ *ait pour bissectrice l'axe focal, et que* $om \times on$ *soit égal au carré* c^2 *de la demi-distance focale; dans ces conditions, on peut remplacer* (s) *par toute conique homofocale. L'enveloppe des polaires de* m *par rapport aux coniques homofocales à* (s) *est la parabole* (m) *de foyer* n *et de directrice* om.

Cette parabole, dite *parabole de Chasles*, possède de nombreuses propriétés (F. Balitrand, *N. A.*, 1913, p. 198); elle est en particulier l'enveloppe des tangentes aux coniques du faisceau tangentiel défini par les foyers de (s) menées par les pieds des normales issues de m à ces coniques.

Le cercle mbc passant au point fixe n, le point diamétralement opposé à m sur ce cercle décrit une droite fixe, d'où cette proposition connue :

Le point commun aux normales en b et c à (s) décrit la perpendiculaire μ en n à mn, quand (s) se déforme en conservant ses foyers.

Cette droite μ contient en particulier les centres de courbure en m aux deux coniques du faisceau qui passent en ce point; à tout point m correspond ainsi, les foyers de (s) étant donnés, une droite μ dont la construction est immédiate, puisque n est sur le cercle $m\varphi\varphi'$ et sur la symétrique de om par rapport à $\varphi\varphi'$; à l'aide de la relation $om \times on = c^2$ et de ce qui précède, on voit aisément qu'à une droite μ correspondent trois points m. Laguerre a donné de curieuses propriétés du triangle de ces points (F. Balitrand, *N. A.*, 1914, p. 1).

8. Observant que la parabole (m) touche les axes de (s), nous pouvons énoncer ce théorème de Chasles :

Le quadrilatère normal circonscrit à (s) et relatif à un point p est circonscrit à la parabole (p) tangente aux axes et aux bissectrices de $\widehat{\varphi p \varphi'}$.

La directrice de (p) étant op, les orthocentres des triangles normaux circonscrits relatifs à p sont sur cette droite op; les cercles circonscrits à ces triangles passent au foyer de (p), c'est-à-dire au point q tel que $\widehat{poq}$ ait pour bissectrice l'axe focal de (s) et que

$$op \times oq = c^2.$$

La symétrique de om par rapport aux axes (*fig.* 3) et on étant conjuguées, ad, polaire de n, est parallèle à la droite joignant les projections m' et m'' de m sur les axes; la trace u de ad sur l'axe focal ox de (s) a

pour polaire la perpendiculaire à cet axe menée en n, et l'on a $\overline{ou} \times x_1 = a^2$, et par suite $\overline{ou} = -x_0$: *$a\,d$ et $m'm''$ sont symétriques par rapport à o.*

Si donc, m restant fixe, (s) se déforme en conservant ses foyers, *ad reste fixe, et le lieu de n est alors une*

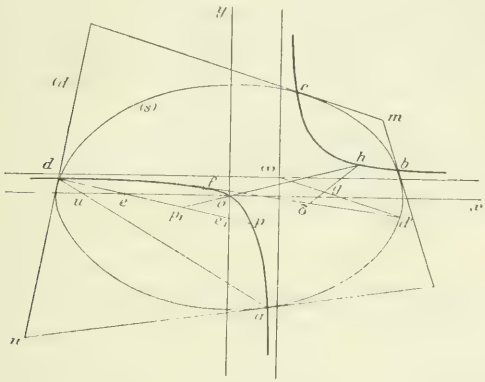


Fig. 3.

droite perpendiculaire à ad et passant par le point conjugué harmonique de u par rapport aux foyers φ et φ'.

9. Nous allons maintenant supposer que, (s) restant fixe, *p se déplace sur la normale à (s) en un point d de cette conique.*

Le pôle n de ad décrit la tangente (d) en d, la droite joignant les projections de n sur les axes enveloppe une parabole tangente aux axes aux points où (d) les coupe; la droite bc symétrique de la précédente par rapport à o enveloppe une parabole (π) symétrique de la précédente, d'où ce théorème :

Le triangle abc, qui a pour sommets les pieds de

trois des normales issues d'un point p à une conique (s) est circonscrit à une parabole (π) tangente aux axes aux points situés sur la tangente (d') à (s) au point d' diamétralement opposé au pied d de la quatrième normale issue de p.

Le foyer de (π) est la projection r de o sur cette droite (d'), le cercle circonscrit à abc passe en ce point, et nous retrouvons ce théorème de Laguerre :

Le cercle de Joachimsthal relatif à d, c'est à-dire le cercle abcd', contient la projection r de o sur la tangente à (s) en d'.

Nous reportant à un théorème obtenu plus haut (4), nous voyons que or passe en f, diamétralement opposé à d' sur le cercle, de sorte que *of est parallèle à la normale en d.* L'orthocentre h de abc (*fig.* 3) et le quatrième point commun f à l'hyperbole équilatère (h) et au cercle abc sont, comme l'on sait, diamétralement opposés sur (h), et l'on a cette propriété :

La droite oh joignant le centre de (s) à l'orthocentre de abc et la quatrième normale pd issue de p ont des directions symétriques par rapport aux axes de (s).

La droite oh est la directrice de la parabole (π), elle est le lieu géométrique de h quand p décrit la normale fixe en d, car alors (π) ne change pas.

10. Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire quand (h) se déforme en passant en d et o, p et f décrivent des divisions homographiques sur deux droites parallèles : les points à l'infini de ces droites, qui coïncident, se correspondent, donc pf pivote ; en supposant que p

vienne successivement sur les axes, on trouve que son point fixe est à l'infini; par conséquent :

Le point (p) *parcourant la normale à* (s) *en* d, *le point* f, *quatrième point commun à l'hyperbole d'Apollonius* (h) *relative à* p *et au cercle de Joachimsthal relatif à* d, *décrit le diamètre de* (s) *parallèle à la normale fixe, le segment* pf *conserve une direction et une grandeur constantes.*

Le cercle de Joachimsthal passe en deux points fixes d' et r, *son centre* δ *décrit la droite inversement homothétique de la normale fixe relativement à* o, *dans le rapport* $\frac{1}{2}$.

Nous avons vu que, g désignant le centre de gravité de abc, og coupe (h) au point k diamétralement opposé à d, est par suite symétrique de od par rapport aux axes de (s); donc, quand p décrit la normale en d, *le lieu de* g *est la droite symétrique de* od *par rapport aux axes de la conique* (s).

11. Si t est le symétrique de p par rapport à δ, $d't$ est équipollent à pf, et le point t reste fixe; supposons que p vienne en p_1, point de oh qui est le milieu du segment ee' intercepté sur la normale en d par les axes de (s) (*fig.* 3) : comme h est sur (h), p_1 et h coïncident; k désignant encore le point de (h) diamétralement opposé à d, pk et pd sont également inclinées sur les axes; si donc p vient en p_1, k vient en o, kd en od, ω au milieu de od; comme $og = \frac{ok}{3}$, g vient en o; ainsi h coïncide alors avec p_1, g avec o; par suite, δ se confond avec δ_1 milieu du segment op'_1 opposé à op_1, de sorte que t est le point de oh symé-

trique de p_1 par rapport à δ_1, et que

$$\overline{ot} = 2\overline{op_1'} = -2\overline{op_1}.$$

Le point p se déplaçant sur la normale en d à (s), le centre ω de (h) décrit la droite (ω) joignant les projections de d sur les axes de (s); fh ayant son milieu sur cette droite (ω) et ses points f et h sur les droites fixes lieux de ces points [lesquelles sont le diamètre or de (s) parallèle à la normale fixe et le diamètre oh symétrique par rapport aux axes], enveloppe une parabole tangente aux trois droites : *La parallèle à la normale en d et passant au centre de (s), la symétrique de ce diamètre par rapport aux axes, le diamètre fh de (h), la droite joignant les projections de d sur les axes de (s), les parallèles aux axes menées par d sont six tangentes d'une parabole.*

Par suite le cercle ofh, quand p parcourt la normale en d, a un second point fixe puisqu'alors la parabole ne change pas; il en résulte que son quatrième point commun avec (h) décrit une droite, parallèle à la droite lieu du centre de ce cercle.

Lieu de t. — Appelons ov la distance de o à (d), tangente en d à (s), ow le demi-diamètre perpendiculaire à op_1, p_1 étant le milieu de ee'; ow est parallèle à la tangente symétrique de (d) par rapport à un axe de (s), et est par suite conjuguée du diamètre symétrique de od; on a donc, d'après un théorème d'Apollonius, et en employant les notations habituelles :

$$ov.ow = a.b;$$

d'autre part,

$$ov.de = b^2,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{de}{ow} = \frac{b}{a};$$

on a aussi

$$\frac{de}{de'} = \frac{b^2}{a^2},$$

et

$$(2) \qquad \frac{op_1}{de} = \frac{ee'}{2\,de} = \frac{c^2}{2\,b^2}.$$

Multipliant membre à membre (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{op_1}{ow} = \frac{c^2}{2ab},$$

d'où il suit que le lieu de p_1, quand d décrit (s), est une ellipse (p_1) homothétique de (s) après une rotation de 90° autour du centre; son axe focal, perpendiculaire à celui de (s), a pour valeur $2a \times \frac{c^2}{2ab}$, ou $\frac{c^2}{b}$, l'autre $\frac{c^2}{a}$.

Si l'on projette la figure sur un plan passant par $x'x$ et faisant avec le plan de la figure un angle ayant $\frac{b}{a}$ pour cosinus, l'ellipse (p_1) devient un cercle, $de\,e'$ devient une droite telle que le milieu du segment intercepté sur elle par les axes soit sur le cercle; l'enveloppe de cette droite est une hypocycloïde à quatre rebroussements quadritangente au cercle et projection de la développée de (s); l'ellipse (p_1) est donc quadritangente à cette développée.

Comme $\overline{ot} = -2\,\overline{op_1}$, le lieu de t, quand d décrit (s), est l'ellipse (t) qui a ses sommets aux rebroussements de la développée. Rappelant que Laguerre a nommé *centre d'une droite* le point dont les projections sur les axes ox et oy sont symétriques, par rapport à o, des traces de la droite sur ces axes, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Le point t symétrique de p par rapport au centre δ du cercle de Joachimsthal abcd' est le centre de la normale pd; ce point, qui est sur oh, est fixe quand p décrit la normale; le lieu de t, quand d décrit l'ellipse (s), est l'ellipse semblable (t') qui a ses sommets aux rebroussements de la développée de (s); les centres α, β, γ, δ des quatre cercles de Joachimsthal relatifs à p appartiennent à l'ellipse de grandeur constante (t'), homothétique de la précédente par rapport à p, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$.

12. Le point p' étant le milieu de op, $\delta p'$ est parallèle à oth (*fig.* 4), le segment $p''\delta'$ intercepté sur cette droite par les axes a son milieu sur le diamètre or de (s)

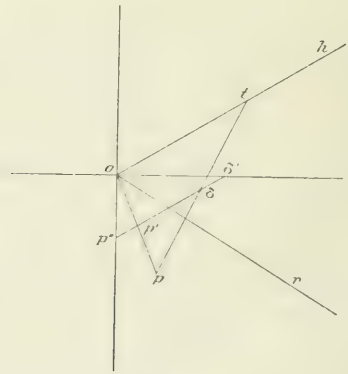


Fig. 4.

parallèle à la normale dp; d'ailleurs, en projetant parallèlement à or, on voit (10) que $p'\delta$ a aussi son milieu sur or, et $\delta\delta' = \overline{p''p'}$, de sorte que δ *est sur l'hyperbole équilatère passant en p' et d'asymp-*

totes ox et oy; t est sur l'hyperbole homothétique de la précédente relativement à p, dans le rapport 2, laquelle contient le point o; on peut énoncer cette proposition :

Les normales à l'ellipse (t) *aux centres des quatre normales issues d'un point* p *concourent; il en est de même des normales à* (t') *aux centres des quatre cercles de Joachimsthal.*

A l'aide de la relation entre ω et p (6), on trouve sans peine que *le point de concours des normales à* (t) *appartient à la droite* $o\omega$ *qui joint le centre de* (s) *et le centre de l'hyperbole d'Apollonius* (h) *relative à* p.

13. Soit $o\theta$ le vecteur équipollent aux vecteurs pf et $d't$; cherchons le lieu de θ quand d décrit (s), ce point θ restant fixe lorsque p se déplace sur la normale en d; si la normale en d' coupe en t' l'axe focal de (s) et en t'' l'autre axe, t' et t'' sont les projections de t sur ces axes, et cette normale passe en θ; $d\theta$ et $t't''$ ont le même milieu. Projetons la figure de manière que l'ellipse (t) devienne un cercle, $t't''$ devient constant, et comme $\frac{d't'}{d't''}$ a une valeur invariable, la projection de $d't'$ est constante; il en est de même pour celle du segment égal $t''\theta$, et dans la figure projetée le lieu de θ est une ellipse obtenue en faisant tourner la projection de (s) de 90° autour de son centre o; si nous revenons à la figure primitive, puisque pf est équipollent à $o\theta$, nous avons ce théorème :

Les quatre points tels que f *qui correspondent à un point* p *sont sur une conique* (φ) *de grandeur*

constante, de centre p, de demi-axes $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$ parallèles à ox et oy.

Comme (h) passe en f et en p, les normales à (φ) aux points tels que f concourent. Observons aussi que les quatre orthocentres, tels que h, relatifs à p sont sur la conique symétrique de (φ) par rapport au centre ω de (h), et que les normales correspondantes concourent.

14. Supposons qu'une tangente roule sur la parabole (π) rencontrée plus haut (9); elle coupe (s) en deux points tels que b et c, et les normales en ces points concourent sur la normale en d; en considérant une tangente commune à (π) et à (s), le point p correspondant est sur la développée de (s), c'est un point commun à cette courbe et à la normale en d; donc : *la normale à (s) en d coupe la développée en quatre points (dont deux seulement sont réels) qui sont sur les normales à (s) aux points de contact de cette conique avec les tangentes communes à (s) et à (π).*

Il suit de là que la développée est du sixième ordre.

Nous avons vu que les tangentes communes à (s) et à une parabole tangente aux axes de cette conique touchent (s) en quatre points qui sont les pieds des normales issues d'un point p, ce point et le foyer q de la parabole étant tels que poq a pour bissectrice l'axe focal de (s), et que $op \times oq = c^2$; appliquant cette propriété à la parabole (π), nous avons ce théorème dû à M. Laisant :

La normale à (s) en un point d coupe la développée de (s) en quatre points pour lesquels les tangentes concourent.

Si z désigne le point commun à ces tangentes, l'angle $\widehat{zor}$, r désignant le foyer de (π), a pour bissectrice l'axe focal, et $oz \times or = c^2$; mais $d't' \times or = b^2$ (*fig.* 5), donc $\frac{oz}{d't'} = \frac{c^2}{b^2}$; comme on a aussi $\frac{d't'}{t't'} = \frac{b^2}{c^2}$,

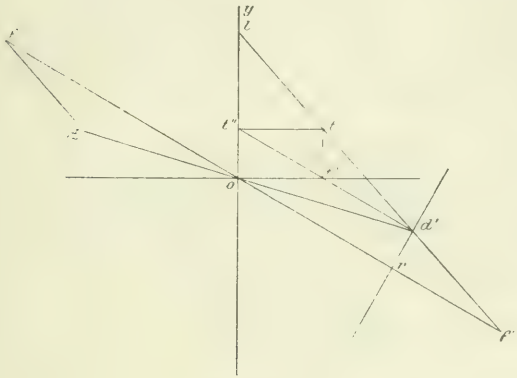


Fig. 5.

il en résulte que $oz = t't''$, et le point z est le point t trouvé plus haut, le lieu de z est l'ellipse (t) :

Les normales à (s) issues du centre t d'une normale touchent la développée aux points communs à cette courbe et à cette normale.

Le lieu du foyer r de la parabole (π) est la podaire du point o par rapport à (s) et aussi la figure inverse de (t) par rapport à o, la puissance d'inversion étant c^2.

15. En transformant le premier théorème du n° 9 par polaires réciproques par rapport à (s), nous obtenons celui-ci :

Le triangle ABC *formé par les tangentes en* a, b, c *à* (s), *triangle normal circonscrit, est inscrit à une hyperbole équilatère* (H) *passant en* o, *ayant son centre en* d', *et ses asymptotes parallèles à* ox *et* oy.

Réciproquement, il existe une infinité de pareils triangles circonscrits à (s) *et inscrits à l'hyperbole, et le lieu du point de concours* p *des normales à* (s) *correspondantes est la normale à cette conique au point* d *diamétralement opposé à* d'.

Le triangle pédal de p par rapport à ABC étant abc, qui est inscrit dans le cercle de Joachimsthal $abcd'$, et t étant symétrique de p par rapport au centre δ de ce cercle, *les points* p *et* t *sont inverses par rapport au triangle normal circonscrit* ABC.

Les quatre points a, b, c, d' étant sur un cercle, bc et ad' sont symétriques en direction par rapport aux axes de (s), directions asymptotiques de (H), $d'a$ et bc ont des directions conjuguées par rapport à cette hyperbole : *le triangle* abc *est conjugué par rapport à l'hyperbole;* par suite, ABC *est conjugué par rapport à la parabole* (π), et le centre du cercle circonscrit à ce triangle est sur ot, directrice de cette parabole. De tout ce qui précède, il résulte que :

Pour que les normales en trois points d'une conique (s) *concourent, il faut et il suffit que le cercle circonscrit au triangle de ces trois points passe par la projection du centre de* (s) *sur la tangente ayant pour point de contact le quatrième point commun.*

Cette condition devient, pour la parabole, que le cercle passe au sommet, ou, à cause d'un théorème

vu (3), que le centre de gravité du triangle soit sur l'axe de la parabole.

16. Faisons une transformation homographique de la figure formée par la conique (s) et l'hyperbole équilatère (h) passant au centre de (s) de manière que deux des points communs à ces courbes, b et c, deviennent les points cycliques; soient o_1, x_1, y_1 les transformés des points o, $x(\infty)$, $y(\infty)$: la nouvelle figure se compose de deux cercles (s_1) et (h_1) dont le second est harmoniquement circonscrit à l'autre, $o_1x_1y_1$ étant conjugué à (s_1) et inscrit à (h_1), et qui se rencontrent en a_1 et d_1; m_1 étant le centre de (s_1), joignons m_1a_1 qui coupe (h_1) en a_2; nous avons

$$m_1a_1 \times m_1a_2 = 2\overline{m_1a_1}^2,$$

d'où

$$m_1a_2 = 2m_1a_1.$$

Comme m_1 est l'orthocentre de $o_1x_1y_1$, a_1 est sur le cercle des neuf points de ce triangle, et par suite le foyer d'une parabole (σ_1) conjuguée à $o_1x_1y_1$.

Si nous revenons à la figure primitive, nous voyons que *abc est circonscrit à une conique σ ayant les mêmes axes que (s).*

Nous établirions d'une manière analogue que, réciproquement, *si deux coniques (s) et (σ) sont coaxiales, et s'il existe des triangles inscrits à (s) et circonscrits à (σ), tout pareil triangle abc est inscrit à une hyperbole (h), et les normales à (s) aux sommets de ce triangle concourent.*

En nous reportant au numéro précédent, nous pouvons dire que, de même que le centre d' de (II) est sur (s), *le centre ω de (h) est sur (σ)*; ω et p, point

de concours des normales, se correspondant homographiquement, *le lieu de p est une conique*, quand abc se déforme, (s) et (σ) restant fixes.

Il résulte encore de ce qui précède (15) que *les normales à (σ) aux points où cette conique touche les côtés de abc concourent;* et, de même que le cercle abc passe au centre d' de (H), *le cercle des points de contact de (σ) avec les côtés de abc contient le centre ω de (h)*. Ces diverses propriétés sont dues à M. Duporcq.

17. En particulier, si (σ) est une ellipse de demi-axes α et β, et (s) le cercle de Chasles (γ) de rayon $(\alpha+\beta)$, on montre aisément qu'il existe des triangles inscrits à (γ) et circonscrits à (σ); soient abc un tel triangle, $a'b'c'$ le triangle des points de contact de (σ) avec ses côtés, les normales à (σ) aux sommets de ce triangle concourent sur le cercle de Chasles (γ') de rayon $(\alpha-\beta)$, qui contient aussi l'orthocentre de abc. Il y a d'ailleurs réciprocité entre les deux cercles de Chasles, mais les triangles circonscrits à (σ) et inscrits dans (γ') ne sont réels que si $\alpha > 2\beta$; ces propriétés ont été utilisées dans l'étude des ellipses tritangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements (*N. A.*, 1913).

18. *Triangles normaux circonscrits correspondant à un point de (s).* — Revenons à la figure 3 : si p coïncide avec d, le centre δ du cercle $abcd'$ vient au milieu de dt; comme les points d et t se correspondent homographiquement sur (s) et (t) (11), *le centre δ du cercle de Joachimsthal décrit une conique, quand p décrit la conique (s).*

Conservant les notations employées plus haut, appe-

lons l le point ou $d't$ coupe oy, f' la position que vient occuper f quand p vient en d (*fig.* 5); ce point f' est sur le diamètre parallèle à la normale à (s) en d, lequel coupe en r la tangente en d'; df' et $d't$ sont équipollents, et si $d't$ coupe or en f'', ce point f'' est symétrique de t relativement à d'; la puissance de o par rapport au cercle de Joachimsthal $abcd'$ a ici pour valeur absolue

$$or \times of' \quad \text{ou} \quad or \times of'';$$

comme

$$or \times d't' = b^2$$

et

$$\frac{of''}{d't'} = \frac{ol}{t't} = \frac{t't + t''l}{t't} = 1 + \frac{t''l}{t't} = 1 + \frac{d't''}{d't'} = 1 - \frac{a^2}{b^2},$$

on a

$$or \times of'' = a^2 + b^2;$$

donc *le point o a même puissance* $-(a^2 + b^2)$ *par rapport au cercle* $abcd'$ *quand* d *parcourt la conique* (s); ce cercle a donc pour enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre. Dans les mêmes conditions, comme p et le centre ω de (h) se correspondent homographiquement, ω décrit une conique; il en est de même pour f', pour l'orthocentre h et pour le centre de gravité g de abc; le point f' en particulier a pour lieu une ellipse homothétique de l'ellipse (t) (II) qui a ses sommets aux points de rebroussement de la développée de (s).

Le point p coïncidant encore avec d, soit ABC le triangle normal circonscrit correspondant à abc; menons par o la parallèle à la normale ad qui coupe en A_1 et A_2 les tangentes en a et d, o est le milieu de A_1A_2, A_1 est donc sur la tangente (d') à (s) au point diamétralement opposé à d; on en conclut que les pro-

jections de o sur les côtés de ABC sont en ligne droite, et que *le triangle* ABC *est circonscrit à une parabole ayant o pour foyer et (d') pour tangente au sommet; le cercle* ABC *passe en o* (F. Balitrand, *N. A.*, 1914, p. 4).

Soit α le point où la normale en a coupe l'axe focal de (s), on sait que $oA_1 \times a\alpha = b^2$; sur oA_1, portons $o\alpha' = \alpha a$, de sorte que $o\alpha' \times oA_1 = b^2$; les trois points analogues à A_1 étant sur la tangente (d') à (s), les trois points analogues à α' sont sur un cercle passant en o et tangent à la parallèle à (d') menée en ce point; considérant les vecteurs d'origine d et équipollents aux vecteurs tels que $o\alpha'$, nous voyons que :

Si sur chacune des normales issues du point d de (s) et autres que celle qui a son pied en d, on porte, à partir de d, une longueur égale au segment compris entre l'axe focal et le pied de la normale, les trois points ainsi obtenus sont sur un cercle tangent en d à (s) (Laguerre).

Le segment de la normale en d compris entre ce point et l'axe focal est le diamètre de ce cercle.

19. *Triangles d'aire maxima inscrits dans une ellipse.* — p décrivant la normale en d à l'ellipse (s), supposons que ce point vienne en p_1 milieu du segment intercepté par les axes sur la normale; k désignant comme plus haut le point diamétralement opposé à d sur (h), pk et pd sont également inclinées sur les axes; si donc p vient en p_1, k vient en o, kd en od, *le centre ω de (h) est le milieu de od*, et réciproquement: comme $og = \frac{ok}{3}$, le centre de gravité de abc est en o, et le triangle abc est un triangle d'aire maxima

inscrit dans (s); le lieu de p_1 est l'ellipse (p_1) déjà rencontrée (11); donc :

Les normales aux sommets d'un triangle maximum inscrit dans une ellipse concourent et le lieu du point de concours est l'ellipse (p_1) quadritangente à la développée. Tout triangle maximum est circonscrit à une parabole tangente aux axes dont le lieu du foyer est la podaire de l'ellipse par rapport au centre.

Les tangentes à (s) en a, b, c étant parallèles à bc, ca, ab, l'orthocentre h du triangle coïncide avec p_1; cela résulte aussi de ce que h est sur (h) et sur op_1 (9); le centre δ du cercle circonscrit est donc symétrique, par rapport à o, du milieu de op_1; son lieu est *l'ellipse homothétique de (p_1) relativement au centre, dans le rapport* $\frac{1}{2}$.

Cherchons la puissance de o par rapport au cercle abc, soit $oa = a'$, b' le demi-diamètre conjugué, a_1, a_2 et a_3 les points où oa coupe (s), le cercle et la droite bc :

$$\overline{a_3 b}^2 = a_3 a \times a_3 a_2 = \frac{3a'}{2} \times a_3 a_2,$$

$$\frac{\overline{a_3 b}^2}{a_3 a \times a_3 a_1} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

d'où

$$\overline{a_3 b}^2 = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{3a'}{2} \cdot \frac{a'}{2} = \frac{3b'^2}{4}, \qquad a_3 b = \frac{b'\sqrt{3}}{2}$$

et

$$a_3 a_2 = \frac{b'^2}{2a'};$$

donc

$$oa + oa_2 = a'\left(\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}\right) = \frac{a'^2 + b'^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Ainsi cette puissance est *constante* et égale à $-\frac{a^2+b^2}{2}$; le cercle abc enveloppe une anallagmatique du quatrième degré.

Si d' est le quatrième point commun à l'ellipse et au cercle abc, ad' et bc sont des cordes conjointes; il en est de même de ad' et de la tangente en a à (s), d'où ce théorème dû à Steiner :

Les cercles osculateurs en a, b, c se coupent sur la conique en un point d', qui est le quatrième point commun à (s) et au cercle abc, et qui est diamétralement opposé au pied de la quatrième normale issue du point de concours des normales en a, b, c, orthocentre du triangle de ces trois points.

Enveloppe de ad'. — Considérons le cercle dont l'ellipse est la projection et soit AD′ la corde projetée en ad', AA_1 la corde parallèle à ox, B le milieu de l'arc qu'elle sous-tend; on a

$$\text{arc } AA_1 = \text{arc } A_1D' \qquad \text{ou} \qquad 3 \text{ arc } BA = -\text{arc } BD';$$

il en résulte que AD′ enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, quadritangente au cercle sur $x'ox$ et sur le diamètre perpendiculaire : *l'enveloppe de ad' est la projection de cette courbe*, c'est une courbe de quatrième classe tangente à l'ellipse aux sommets, et ayant quatre points de rebroussement sur les diagonales du rectangle des axes, à des distances du centre égales à ces diagonales; donc *il existe quatre cercles osculateurs à une ellipse tels que les cordes communes à cette courbe et à ces cercles passent en un point donné* (Steiner).

A est le milieu du segment intercepté par les tan-

gentes de rebroussement sur la tangente AD′ à l'hypocycloïde, donc en projection *a est le milieu du segment déterminé sur ad′ par les diagonales du rectangle principal circonscrit à* (s); le lieu de ces points milieux pour les droites passant par un même point donné est une hyperbole d'axes parallèles à ceux de l'ellipse, coupant par suite cette courbe en quatre points d'un même cercle; donc *les quatre cercles osculateurs dont les cordes communes avec l'ellipse passent en un point ont leurs points de contact sur un cercle.*

20. *Synormales.* — Appelons *synormale* à une conique (s), en un point a de cette courbe, la droite passant par a et symétrique, en direction, par rapport aux axes de (s), de la normale en ce point a; soient a_1 et a'_1 les points où la normale et la synormale en a coupent l'axe focal, p et p' deux points appartenant respectivement à ces droites et tels que $\widehat{pop'}$ ait l'axe focal pour bissectrice, i la projection de a sur cet axe; nous pouvons écrire

$$\frac{op'}{op} = \frac{oa'_1}{oa_1} = \frac{oi - ia_1}{oi - ia_1} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2};$$

on conclut de là que :

Les synormales correspondant aux quatre normales issues de p concourent en p′.

D'un point on peut mener quatre synormales à une conique, et les normales correspondantes concourent.

L'enveloppe de la synormale d'une ellipse est une transformée homographique de la développée, qui a

pour équation

$$\left(\frac{ax}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

21. *Sur le centre de courbure d'une conique.* — Nous avons vu que, si d'un point m on mène des tangentes à une conique de foyers φ et φ', le cercle déterminé par m et les points de contact passe par un deuxième point fixe n, quand la conique se déforme en conservant ses foyers (7), le lieu géométrique du point commun aux normales à la conique aux points de contact des tangentes issues de m est la perpendiculaire en n à mn; si nous considérons en particulier l'ellipse de foyers φ et φ' qui passe en m, il résulte de ce qui précède que son centre de courbure μ en m est le point de la normale qui se projette en n sur mn; d'ailleurs, mn est symédiane pour le triangle $m\varphi\varphi'$ (*fig.* 6); soient l le point où la normale en m coupe

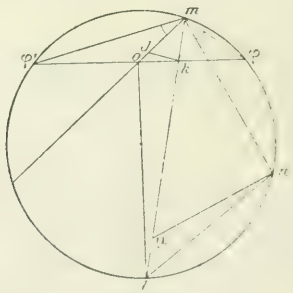


Fig. 6.

l'axe non focal, k celui où elle coupe l'axe focal; menons la perpendiculaire en k à mk qui coupe om

en j : les triangles semblables mjk et $m\mu n$ donnent

$$\frac{mj}{m\mu} = \frac{mk}{mn},$$

les triangles mko et mnl sont aussi semblables, et

$$\frac{mk}{mn} = \frac{mo}{ml};$$

par conséquent,

$$\frac{mj}{m\mu} = \frac{mo}{ml}$$

et $j\mu$ est perpendiculaire à l'axe focal : on retrouve la construction de Mannheim.

22. m et m' étant deux points de l'ellipse (s), k et l, k' et l' les points où les normales dont les pieds sont m et m' coupent les axes, des égalités

$$\frac{mk}{ml} = \frac{m'k'}{m'l'} = \frac{b^2}{a^2}$$

il résulte que *la droite mm' et les deux normales touchent une parabole tangente aux axes;* en supposant que m' vienne coïncider avec m, on trouve ce théorème dû à Mannheim : *le centre de courbure μ de (s) en m est le point où la normale en m touche la parabole (p) tangente aux axes, à la normale et à la tangente en m à (s)*; on en déduit la construction de μ rappelée plus haut.

Si μ' est le centre de courbure en m de l'hyperbole homofocale de (s) et qui passe en ce point, le triangle $m\mu\mu'$ donne

$$m\mu = m\mu' \times \operatorname{tang}\mu' = m\mu' \times \operatorname{tang}\widehat{\mu mn} = m\mu' \times \operatorname{tang}\widehat{omk},$$

d'où

$$\frac{m\mu}{m\mu'} = \frac{\sin \widehat{om\mu}}{\sin \widehat{om\mu'}}.$$

Ainsi *les rayons de courbure en m des deux coniques homofocales passant en ce point sont proportionnels aux sinus des angles que font avec om les normales en m aux deux coniques.*

La directrice de la parabole (p) étant om, en supposant que le centre de (s) s'éloigne à l'infini, le théorème de Mannheim prend la forme suivante :

Le centre de courbure en un point m d'une parabole est le point de contact de la normale en ce point avec la parabole (p) tangente à la normale et à la tangente en m à la première, et ayant l'axe de celle-ci pour tangente au sommet.

Le foyer de (p), qui est n dans le cas d'une conique quelconque, devient ici le symétrique de m par rapport au foyer de la parabole donnée; de ces propriétés on déduit sans peine la construction classique du centre de courbure en un point d'une parabole.

23. Nous donnerons, pour terminer, une démonstration de ce théorème :

Le centre de courbure en un point m d'une conique est le pôle de la tangente en ce point par rapport à la conique homofocale qui y passe (Salmon, *Sections coniques*, 2e édition, p. 642; F. Balitrand, *N. A.*, 1913, p. 204).

Conservant les notations employées ci-dessus, prouvons que μ' est le pôle de la normale mkl par rapport

à (s) : menons par m une corde variable de (s) coupant l'axe focal en λ, et par o son diamètre conjugué coupant en λ' la tangente en m; ces droites déterminent sur l'axe focal et sur la tangente deux divisions homographiques, et l'on a

$$\alpha . o\lambda . i\lambda' + \beta . o\lambda + \gamma . i\lambda' + \delta = 0,$$

α, β, γ, δ désignant des constantes, et i le point où la tangente en m coupe l'axe oy; en supposant que la corde $m\lambda$ coïncide successivement avec mo, avec la parallèle à l'axe focal, ou avec la tangente, on trouve que cette relation se réduit à

$$o\lambda . i\lambda' = ok' . im \qquad \text{ou} \qquad \frac{o\lambda}{ok'} = \frac{im}{i\lambda'},$$

k' étant le point commun à la tangente en m et à l'axe focal; cette égalité montre que λ' est le point où la parabole tangente à imk', $m\lambda$ et aux axes de (s), touche la tangente en m à (s), de sorte que *toute parabole tangente aux axes d'une ellipse et à la tangente en m à cette courbe touche cette tangente en un point dont la polaire par rapport à l'ellipse est la deuxième tangente menée de m à la parabole.* Appliquant cette propriété à la parabole (p) (22), nous voyons que la polaire de μ' par rapport à l'ellipse est précisément la normale mkl en m à cette conique, ce qui démontre le théorème que nous nous proposions d'établir.

[O¹2q]

SUR UNE COURBE SPHÉRIQUE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Si l'on cherche en coordonnées polaires une courbe plane telle que la longueur de l'arc MM′ soit proportionnelle à l'angle $\widehat{MPM'}$, P étant le pôle, on a

$$ds = l\,d\theta, \qquad dr^2 + r^2\,d\theta^2 = l^2\,d\theta^2, \qquad d\theta = \frac{dr}{\sqrt{l^2 - r^2}};$$

on a donc les deux solutions :

$$(1) \qquad r = l,$$

$$(2) \qquad r = l \sin\theta;$$

la seconde courbe est un cercle passant en P.

Le problème analogue sur la sphère donne lieu au calcul suivant :

$$\frac{ds}{R} = k\,d\theta, \qquad \left(d\,\frac{r}{R}\right)^2 + \sin^2\frac{r}{R}\,d\theta^2 = k^2\,d\theta^2,$$

ou

$$d\theta = \frac{d\,\dfrac{r}{R}}{\sqrt{k^2 - \sin^2\dfrac{r}{R}}};$$

on a donc les deux solutions

$$(3) \qquad \frac{r}{R} = \operatorname{arc\,sin} k,$$

$$(4) \qquad \sin\frac{r}{R} = k \times \sin \operatorname{am}\theta = k \times \operatorname{sn}\theta,$$

la fonction elliptique sn ayant pour module le nombre k.

Si R devient infini, k tendant vers zéro et la limite du produit Rk étant l, $\operatorname{sn}\theta$ devient $\sin\theta$ et les formules (3) et (4) deviennent les formules (1) et (2).

[K'2d]

NOTE SUR L'EULÉRIENNE;

PAR M. AURIC.

Si, dans un triangle $A_1A_2A_3$, pris comme triangle de référence, on mène les céviennes de deux points P, Q dont les coordonnées barycentriques sont $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}$ et $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3}$, les pieds des céviennes sont sur une conique E dont l'équation est

$$\Sigma p_1 q_1 x_1^2 - (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3 = 0$$

et que nous appellerons *eulérienne* (¹) parce que si P est le barycentre G, et Q l'orthocentre H, la conique obtenue est le cercle des neuf points.

Si nous posons

$$\sum \frac{p_1}{q_1} = \rho, \qquad \sum \frac{q_1}{p_1} = \sigma,$$

les autres points d'intersection des céviennes A_1P, A_1Q avec E sont

$$\frac{p_1 x_1}{1 + \frac{p_1}{q_1}\sigma} = p_2 x_2 = p_3 x_3, \qquad \frac{q_1 x_1}{1 + \frac{q_1}{p_1}\rho} = q_2 x_2 = q_3 x_3.$$

La droite PQ est tangente à E si $\rho\sigma = 1$ ou $\rho\sigma = 9$; P et Q sont conjugués par rapport à E si $\rho\sigma = 3$.

L'équation de l'eulérienne s'écrit

$$\Sigma x_1 \Sigma p_1 q_1 x_1 = \Sigma (p_2 + p_3)(q_2 + q_3) x_2 x_3,$$

(¹) Lorsque P et Q sont confondus, l'eulérienne devient une conique inscrite.

ce qui montre que E est homothétique à la conique circonscrite que représente le second membre.

En particulier, si P est en G,

$$p_1 = p_2 = p_3,$$

Q en H,

$$q_1 = \cot A_1, \qquad q_2 = \cot A_2, \qquad q_3 = \cot A_3,$$

$$\sum (\cot A_2 + \cot A_3) x_2 x_3 = \sum \frac{\sin A_1}{\sin A_2 \sin A_3} x_2 x_3$$
$$= \frac{1}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3} \sum \sin^2 A_1 x_2 x_3,$$

qui est l'équation du cercle circonscrit comme on devait s'y attendre puisque, dans ce cas, l'eulérienne est un cercle.

L'équation de E s'écrit également

$$\Sigma p_1 x_1 \Sigma q_1 x_1 = 2 \Sigma (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3,$$

ce qui montre que E, la conique circonscrite

$$\Sigma (p_2 q_3 - p_3 q_2) x_2 x_3 = 0$$

et la conique conjuguée,

$$\Sigma p_1 q_1 x_1^2 = 0$$

appartiennent au même faisceau dont les cordes d'intersection sont $\Sigma p_1 x_1 = 0$ et $\Sigma q_1 x_1 = 0$.

Enfin, E peut aussi s'écrire

$$\Sigma [(p_1 + q_1)^2 - (p_1 - q_1)^2] x_1^2$$
$$- 2[(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) - (p_2 - q_2)(p_3 - q_3)] x_2 x_3 = 0.$$

Sous cette forme, on voit que E appartient au faisceau de deux coniques inscrites dans $A_1 A_2 A_3$, les céviennes des points de contact concourant en

$$(R) \qquad \frac{1}{p_1 + q_1}, \quad \frac{1}{p_2 + q_2}, \quad \frac{1}{p_3 + q_3}$$

et

$$(S) \qquad \frac{1}{p_1 - q_1}, \quad \frac{1}{p_2 - q_2}, \quad \frac{1}{p_3 - q_3}.$$

On a donc la proposition suivante :

Soient quatre points P, Q, R, S dont les inverses forment une division harmonique : si l'on construit les coniques inscrites dont les points de contact sont les pieds des céviennes des points R et S, les points d'intersection de ces deux coniques sont sur l'eulérienne des points P et Q, et réciproquement.

Si l'on pose

$$p_2 q_3 - p_3 q_2 = \lambda_1, \qquad p_2 q_3 + p_3 q_2 = \mu_1,$$

l'équation tangentielle de l'eulérienne est

$$\Sigma \lambda_1^2 u_1^2 - 2(\lambda_2 \lambda_3 + 2\mu_2 \mu_3) u_2 u_3 = 0.$$

Les coordonnées du centre de E sont

$$\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1) + 2\mu_1(\mu_2 + \mu_3),$$
$$\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2) + 2\mu_2(\mu_3 + \mu_1), \quad \ldots.$$

On voit aisément que l'équation de E peut se mettre sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & p_1 x_1 \\ 1 & 0 & 1 & p_2 x_2 \\ 1 & 1 & 0 & p_3 x_3 \\ q_1 x_1 & q_2 x_2 & q_3 x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous considérons la conique circonscrite

$$\Sigma n_1 x_2 x_3 = 0$$

et si nous appelons $t_1 t_2 t_3$ le pôle par rapport à cette conique de la droite

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

on voit aisément que, si l'on a la relation

$$\lambda_1 t_1 u_1 + \lambda_2 t_2 u_2 + \lambda_3 t_3 u_3 = 0,$$

le lieu du point représentatif U est une eulérienne si

N est fixe, de même que le lieu de N est une eulérienne si U est fixe.

L'équation de cette eulérienne est

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & n_1 u_1 \\ 1 & 0 & 1 & n_2 u_2 \\ 1 & 1 & 0 & n_3 u_3 \\ \lambda_1 n_1 u_1 & \lambda_2 n_2 u_2 & \lambda_3 n_3 u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on a la relation

$$\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \mu_3 n_3 = 0,$$

le lieu de T, si U est fixe, est l'eulérienne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & u_1 t_1 \\ 1 & 0 & 1 & u_2 t_2 \\ 1 & 1 & 0 & u_3 t_3 \\ \mu_1 t_1 & \mu_2 t_2 & \mu_3 t_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En particulier, si $u_1 = u_2 = u_3$, le lieu du pôle de Δ_∞, c'est-à-dire du centre, est une eulérienne.

Considérons la conique inscrite

$$\Sigma m_1^2 x_1^2 - 2 m_2 m_3 x_2 x_3 = 0.$$

Si l'on a comme ci-dessus

$$\lambda_1 t_1 u_1 + \lambda_2 t_2 u_2 - \lambda_3 t_3 u_3 = 0,$$

le lieu du point représentatif T est une eulérienne si M est fixe, de même que le lieu de M est une eulérienne si T est fixe.

L'équation de cette eulérienne est

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & m_1 t_1 \\ 2 & 0 & 2 & m_2 t_2 \\ 2 & 2 & 0 & m_3 t_3 \\ \lambda_1 m_1 t_1 & \lambda_2 m_2 t_2 & \lambda_3 m_3 t_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on a la relation

$$\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 = 0,$$

le lieu de U, si T est fixe, est l'eulérienne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & t_1 u_1 \\ 1 & 0 & 1 & t_2 u_2 \\ 1 & 1 & 0 & t_3 u_3 \\ \mu_1 u_1 & \mu_2 u_2 & \mu_3 u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, on démontre la proposition suivante :

Pour que la conique inscrite ci-dessus

$$\Sigma m_1^2 x_1^2 - 2 m_2 m_3 x_2 x_3 = 0$$

soit conjuguée par rapport aux points B, C, il faut que le point représentatif M se trouve sur l'eulérienne des points $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{C}$.

Nous appellerons *eulérienne généralisée* la conique dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 & p_1 x_1 \\ b_3 & a_2 & b_1 & p_2 x_2 \\ b_2 & b_1 & a_3 & p_3 x_3 \\ q_1 x_1 & q_2 x_2 & q_3 x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En appelant α_1, β_1 les mineurs du discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

on trouve que cette équation développée est

$$\Sigma \alpha_1 p_1 q_1 x_1^2 + \beta_1 (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3 = 0.$$

Si l'on considère la conique

$$\Sigma h_1 n_1^2 x_1^2 + 2 n_2 n_3 x_2 x_3 = 0$$

et si l'on appelle, comme précédemment, $t_1 t_2 t_3$ le pôle de la droite

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

avec la condition

$$\lambda_1 t_1 u_1 + \lambda_2 t_2 u_2 + \lambda_3 t_3 u_3 = 0,$$

on obtiendra les deux eulériennes suivantes en éliminant successivement t_i et u_i,

$$\begin{vmatrix} k_1 & 1 & 1 & \frac{u_1}{n_1} \\ 1 & k_2 & 1 & \frac{u_2}{n_2} \\ 1 & 1 & k_3 & \frac{u_3}{n_3} \\ \lambda_1 \frac{u_1}{n_1} & \lambda_2 \frac{u_2}{n_2} & \lambda_3 \frac{u_3}{n_3} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} k_2 k_3 - 1 & 1 - k_3 & 1 - k_2 & n_1 t_1 \\ 1 - k_3 & k_3 k_1 - 1 & 1 - k_1 & n_2 t_2 \\ 1 - k_2 & 1 - k_1 & k_1 k_2 - 1 & n_3 t_3 \\ \lambda_1 n_1 t_1 & \lambda_2 n_2 t_2 & \lambda_3 n_3 t_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce sont deux eulériennes corrélatives.

On peut transformer, en effet, la définition de l'eulérienne et dire : Si deux droites coupent les côtés du triangle de référence en $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$, les six céviennes $A_i P_i$, $A_i Q_i$ sont tangentes à une conique qui est la corrélative de l'eulérienne.

Enfin, on démontrerait facilement que, si dans l'eulérienne

$$\Sigma p_1 q_1 x_1^2 - (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3 = 0,$$

on fait

$$q_i = p_i \cot A_i.$$

l'eulérienne obtenue est tangente à quatre coniques inscrites, ce qui est une généralisation du théorème de Feuerbach.

CORRESPONDANCE.

Un abonné. — *Au sujet de la puissance d'un point par rapport à une conique.* — La notion de puissance d'un point par rapport à une conique est plus connue et plus fréquemment utilisée que ne semble l'indiquer l'article récent de M. E. Malo sur ce sujet (pp. 157-166).

C'est ainsi que des géomètres tels que Cornu, Painvin, Mathieu, Recoq ont : soit démontré le théorème de Transon ; soit donné son extension à l'espace ; soit fourni de nouvelles interprétations géométriques du résultat obtenu en substituant, dans le premier membre de l'équation d'une conique, les coordonnées d'un point de son plan (*Nouv. Ann.*, 1865, p. 354).

Painvin, dans sa *Géométrie analytique* (t. I, p. 500), démontre le théorème de Transon et indique la nouvelle interprétation géométrique suivante de la puissance d'un point. *La puissance d'un point est proportionnelle au rapport suivant lequel la droite qui joint le centre à ce point est divisée par la polaire du point.* Cette interprétation, qui fait intervenir le centre de la conique, n'est pas applicable à la parabole. Dans le Tome II de son Ouvrage (1re partie, p. 244; 2e partie, p. 61), il étend à l'espace les théorèmes précédents.

Dans sa *Géométrie analytique* (p. 513), M. H. Picquet définit la puissance ponctuelle d'un point par rapport à une conique donnée comme *le carré du*

rayon du cercle ayant pour centre ce point et harmoniquement inscrit à la conique. Ce cercle est unique, et M. H. Picquet démontre (p. 517) que *le lieu des points d'égale puissance ponctuelle par rapport à deux coniques est l'hyperbole équilatère qui passe par leurs points communs. Voir* aussi l'Ouvrage du même auteur : *Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels des sections coniques.*

Enfin, Laguerre a utilisé, à plusieurs reprises, la notion de puissance d'un point par rapport à une conique, notamment dans sa méthode pour intégrer l'équation d'Euler (*Nouv. Ann.*, 1872, p. 156). Il a aussi étendu cette notion aux courbes algébriques [(*Sur les courbes planes algébriques* (*Comptes rendus*, 1865)]. *Voir* encore Valiron, *Nouv. Ann.*, 1913, p. 149.

M. Ph. du Plessis. — La propriété qu'offre la suite des nombres impairs à savoir que, si on la partage, à partir de 1, en groupes contenant 1, 2, 3, ..., p termes, la somme des p termes du $p^{\text{ième}}$ groupe est égale à p^3, a inspiré récemment diverses généralisations (notamment *N. A.*, 1915, p. 166).

M. J. Joffroy a émis, dans une précédente Correspondance (p. 114), l'avis que cette propriété devait être assez anciennement connue.

En effet, dans sa *Théorie des nombres* (p. 226), Édouard Lucas l'attribue à Nicomaque de Gérase, qui vivait à la fin du premier siècle de notre ère.

Cette propriété a, depuis lors, été retrouvée par bien des auteurs. Dans une Note signée Midy, et parue en 1846 dans les *Nouvelles Annales* mêmes (p. 640),

elle est attribuée à M. d'Adhémar (parent sans doute du savant professeur de la Faculté catholique de Lille) et généralisée grâce à cette remarque que *toute puissance entière d'un nombre entier est égale à la différence des carrés de deux entiers.*

L'auteur donne, en effet, plusieurs formules qui, lorsqu'on y regarde de près, peuvent se réduire à une seule que voici :

Si q et r sont le quotient et le reste de la division de $m-1$ par 2, de telle sorte que $m-1=2q+r$, on a, quels que soient les entiers n et m,

$$n^m = \left[\frac{n^q(n^{1+r}+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n^q(n^{1+r}-1)}{2}\right]^2.$$

Or, si l'on pose les deux nombres entiers, élevés au carré dans le second membre, égaux à k et h, de sorte que

$$n^m = k^2 - h^2,$$

on voit, puisque la somme des p premiers termes de la suite des nombres impairs est égale à p^2, que le second membre n'est autre que *la somme des nombres impairs consécutifs depuis le* $(h+1)^{ième}$ *jusqu'au* $k^{ième}$ *inclusivement.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

439.

(1868, p. 187.)

On donne le périmètre et l'axe d'une ellipse, calculer l'autre axe soit par une série convergente, soit par des approximations successives.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Il n'existe, on le sait, aucune expression finie de la longueur d'un arc ou du périmètre L de l'ellipse d'axes $2a$ et $2b$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Dans tous les éléments de calcul intégral, on trouve la série

$$L = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - \ldots \right].$$

Si donc on donne l'axe focal $2a$, on déterminera e^2 et, par suite, $b^2 = a^2(1 - e^2)$ par une équation de degré $(2m - 2)$ correspondant aux m premiers termes de la série.

Cette recherche deviendra impraticable dès qu'on aura seulement pris plus de trois termes.

Quant à représenter e^2 par une série ordonnée par rapport aux puissances de L, cela se fera par la méthode du retour des suites. La série ainsi obtenue donnera la meilleure approximation désirée suivant le nombre de termes que l'on prendra.

Le peu d'intérêt de cette approximation nous dispensera de poursuivre et d'achever une pareille recherche qui est, pour ainsi dire, sans objet.

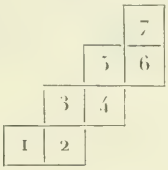
Note du Rédacteur. — Nous croyons que cette question bien ancienne pouvait correspondre à un intérêt pratique très réel. Dans l'art des constructions, dans les problèmes que présentent les organes des machines, il peut fort bien arriver

qu'on ait à déterminer les éléments d'une ellipse dont on connaît un axe et le périmètre, avec une approximation suffisante. C.-A. L.

511.

(1860, p. 46.)

Soient sept carrés égaux, de telle sorte chaque carré peut tourner à charnière seulement autour de la droite



qui lui est commune avec le carré voisin; le carré 1 *ne pourra prendre une position quelconque qu'envers le carré* 7, *et pas envers les autres carrés. Ainsi, si le carré* 1 *est maintenu fixe, il n'y a que le carré* 7 *qui soit entièrement libre.* MÖBIUS.

NOTE

Par M. C.-A. LAISANT.

J'ai tenu à reproduire, sans y changer une syllable, cet énoncé qui a depuis trop longtemps encombré la liste des questions, et n'aurait jamais dû être inséré. Il est très probablement le résultat d'une traduction faite par une personne ignorant la langue française et dépourvue de toute précision d'esprit.

Qu'est-ce que signifie la rotation possible d'un carré autour de *la droite* commune avec le carré voisin, alors que pour 5 de ces carrés sur 7, il y a deux côtés communs et non pas un seul?

Dans cette rotation, le carré mobile tourne-t-il isolément, ou entraîne-t-il avec lui tout le reste du système, par une sorte de pliage?

Qu'appelle-t-on une *position quelconque* du carré 1, qu'on s'empresse aussitôt de rendre fixe, *envers* le carré 7, ou tout autre?

Comment, enfin, un élément qui appartient à un système à liaisons, serait-il *entièrement libre?*

Il ne faut pas chercher à répondre. Il n'y a qu'à biffer la question définitivement. Nos lecteurs ne sauraient être invités à deviner des rébus rédigés en charabia.

882 à 885.

(1868, p. 240.)

882. *La suite des nombres premiers* 2, 3, 5, 17, 257, ... *est-elle illimitée? Ou autrement, y a-t-il une infinité de nombres impairs par lesquels une circonférence peut être divisée en parties égales au moyen de la règle ou du compas?*

883. *Tout nombre pair est-il la somme de deux nombres premiers impairs?*

884. 8 *et* 9 *sont-ils les seuls entiers consécutifs qui soient des puissances des nombres entiers?*

885. *Y a-t-il au moins deux nombres premiers parmi les entiers compris entre les carrés de deux entiers consécutifs?*

NOTE

Par la RÉDACTION.

Ces quatre questions, signées *Lionnet, Algèbre*, 3e *Ed*on, sont précédées de la mention : « Questions d'arithmologie qui n'ont jamais été résolues. »

883 est connue sous le titre de : *Théorème empirique de Goldbach*, et **884** sous celui de : *Théorème empirique de Catalan*. **885** avait été résolue en 1855 par Desboves, dans un article *Sur un théorème de Legendre* (*N. A.*, 1855, p. 281-295).

Ces énoncés n'auraient jamais dû prendre place parmi les questions proposées dans les *Nouvelles Annales*. Ce sont des *desiderata* qu'on pouvait signaler, mais qui ont résisté jusqu'ici à de trop longues recherches pour qu'on pût espérer une réponse.

Bien entendu, aucune n'est parvenue. Dans un article spécial (1879, p. 354) Lionnet, sans du reste rappeler la question **883**, a repris l'examen du théorème de Goldbach, en essayant d'établir, contre l'avis presque unanime, qu'il y a probabilité que le théorème de Goldbach n'est pas vrai. Beau-

coup d'autres arithmologues, tout au contraire, croient que la décomposition d'un nombre pair en deux nombres premiers peut se faire de plusieurs manières, et que ces solutions sont d'autant plus nombreuses que les nombres pairs considérés deviennent plus grands.

Quoi qu'il en soit, les questions **882** à **884** doivent être considérées non pas comme résolues, mais comme liquidées, et disparaître définitivement de notre liste; et la question **885**, comme on l'a vu plus haut, était résolue affirmativement treize années avant d'avoir été posée.

938.

(1869, p. 275.)

Deux ellipses sont situées dans le même plan; l'une est fixe et l'autre mobile autour de son centre. Dans chaque position de l'ellipse mobile, on mène les tangentes communes. On demande le lieu des points de rencontre.

Quand les ellipses sont extérieures, il y a deux tangentes extérieures et deux tangentes intérieures. Trouver le lieu des points de rencontre des premières tangentes et le lieu des points de rencontre des secondes. Examiner les cas particuliers. DAUPLAY.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Soient (E) l'ellipse fixe rapportée à ses axes, (E′) l'ellipse mobile autour de son centre $I(u, v)$.

Un autre système d'axes pourra être proposé, ayant I pour origine, et formé des parallèles IX, IY aux axes de l'ellipse (E).

Ce nouveau système paraît préférable, parce qu'il supprime les deux paramètres u et v de l'équation de l'ellipse (E′). Il est vrai que l'ellipse (E), qui avait pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

aura maintenant pour équation

$$a^2(y+v)^2 + b^2(x+u)^2 = a^2b^2.$$

Cela posé, on suivra la méthode indiquée pour la question **829** et pour les problèmes analogues dont il a été fait mention (1915, p. 191), mais cette recherche présentera encore

une grande complication, pour aboutir, en fait, à un résultat peu en rapport avec le travail qu'il aura exigé.

1552.

(1885, p. 488.)

On donne une asymptote d'une hyperbole équilatère, un point de la courbe et une circonférence tangente à l'hyperbole; déterminer ses axes et ses foyers.

A...

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Soient A le point donné, BB′ l'asymptote fixe, et C le cercle donné de centre I et de rayon r.

Il y a manifestement deux hyperboles équilatères AM, AM′ passant par A, asymptotes à BB′ et tangentes à C. Ainsi, le problème comporte deux solutions, bien qu'il n'en soit demandé ou prévu qu'une seule dans l'énoncé,

D'autre part, le lieu des pieds M, M′ des normales issues du point I aux hyperboles équilatères ici définies est une cubique dont les intersections avec le cercle C représentent les deux points M, M′ pouvant remplacer la donnée du cercle et permettant alors d'achever immédiatement la construction des deux hyperboles demandées.

De la description ci-dessus on conclut que le problème proposé n'est pas quadratique et ne saurait se ramener à une construction par la règle et le compas, ce qui est habituellement sous-entendu dans toutes les déterminations graphiques de coniques par des éléments convenablement choisis.

Le lecteur pourra, par manière de compensation, traiter les deux questions suivantes, modifications de la proposée :

I. On donne A, BB′ et un autre point P.

La solution est immédiate et très simple. AP rencontre BB′ en A′, et la seconde asymptote en un point P′, tel que P′ soit symétrique de A′ par rapport au milieu de AP. Le reste s'ensuit aisément par des moyennes proportionnelles, etc.

II. On donne A, BB′ et une tangente TT′.

On est alors amené à faire intervenir le lieu des points de contact des tangentes parallèles à TT′. Ce lieu est une parabole passant par A et B, projection de A sur BB′, et ayant son axe parallèle à BB′. Cette parabole est rencontrée par TT′ en

deux points M, M′ qui appartiennent à deux branches différentes des deux hyperboles répondant à la question.

1576.

(1888, p. 111)

Les coefficients de l'équation

$$x^5 + 5\frac{a+b}{2}x^4 + 10p_2x^3 + 10p_3x^2 + 5p_4x + p_5 = 0$$

sont liés par la relation

$$(10-r)p_r = \frac{1}{2}(11-2r)(a+b)p_{r-1} + (r-1)abp_{r-2},$$

où l'on suppose $p_0 = 1$ et $a > b$. Montrer que toutes les racines sont réelles et comprises entre $-a$ et $-b$.

D. Ewardes.

Solution

Par M. H. Brocard.

Pour des raisons bien connues, les équations du cinquième degré retiennent peu l'attention des étudiants. On l'a vu déjà ici sur les questions de ce genre posées à intervalles éloignés.

Quant à la présente, le lecteur l'aura certainement négligée à cause de l'omission manifeste de la définition du nombre p_1; car, d'après la relation indiquée, il faut partir de $r = 2$, ce qui donne

$$8p_2 = 7p_1^2 + abp_0,$$

où l'on a bien spécifié $p_0 = 1$, mais p_1 n'a pas été défini, et il faut *deviner* que très probablement, d'après l'équation de l'énoncé, le terme en x^4 doit se lire $5p_1x^4$, par symétrie avec le terme $5p_4x$, et qu'ainsi

$$p_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Dans l'impossibilité de le savoir avec certitude, je m'arrêterai à cette hypothèse.

Les coefficients p_2, p_3, p_4, p_5 seront alors définis par les relations

$$\begin{aligned}
8p_2 &= 7p_1^2 + ab,\\
7p_3 &= 5p_1p_2 + 2abp_1,\\
2p_4 &= p_1p_3 + abp_2,\\
5p_5 &= p_1p_4 + 4abp_3.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$p_2 = \frac{7p_1^2 + ab}{8},$$

$$p_3 = \frac{p_1}{8}(5p_1^2 + 3ab),$$

$$p_4 = \frac{5p_1^4 + 10abp_1^2 + a^2b^2}{16},$$

$$p_5 = \frac{p_1}{16}(p_1^4 + 10abp_1^2 + 5a^2b^2).$$

Ces formules et la lecture de l'énoncé suggèrent les substitutions

$$a = -2a_1, \qquad b = -2b_1;$$

mais, comme l'observe M. Laisant, il sera préférable de poser

$$\frac{a+b}{2} = p, \qquad \frac{a-b}{2} = q,$$

ce qui donnera

$$p_2 = p^2 - \frac{q^2}{8},$$

$$p_3 = p^3 - \frac{3pq^2}{8},$$

$$p_4 = p^4 - \frac{3}{4}p^2q^2 + \frac{q^4}{16},$$

$$p_5 = p^5 - \frac{5}{4}p^3q^2 + \frac{5}{16}pq^4.$$

L'équation à traiter deviendra, dès lors,

$$x^5 + 5px^4 + 10\left(p^2 - \frac{q^2}{8}\right)x^3 + \ldots = 0.$$

Elle se simplifiera un peu par la substitution

$$x + p = z;$$

mais nous laisserons au lecteur le soin de poursuivre cette investigation et de vérifier si l'équation dérivée donnera les facilités désirées pour achever la séparation des racines.

[L¹9b]

SUR LES COUPLES DE POINTS ASSOCIÉS SUR UNE ELLIPSE EN VERTU DU THÉORÈME DE FAGNANO;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. On sait en quoi consiste le théorème de Fagnano :

Si deux points M *et* M′, *pris sur une ellipse, sont tels que les normales à la courbe en ces points soient tangentes à un même cercle concentrique à l'ellipse et de rayon* r, *la différence des arcs* BM *et* AM′ *de la courbe est égale à* r.

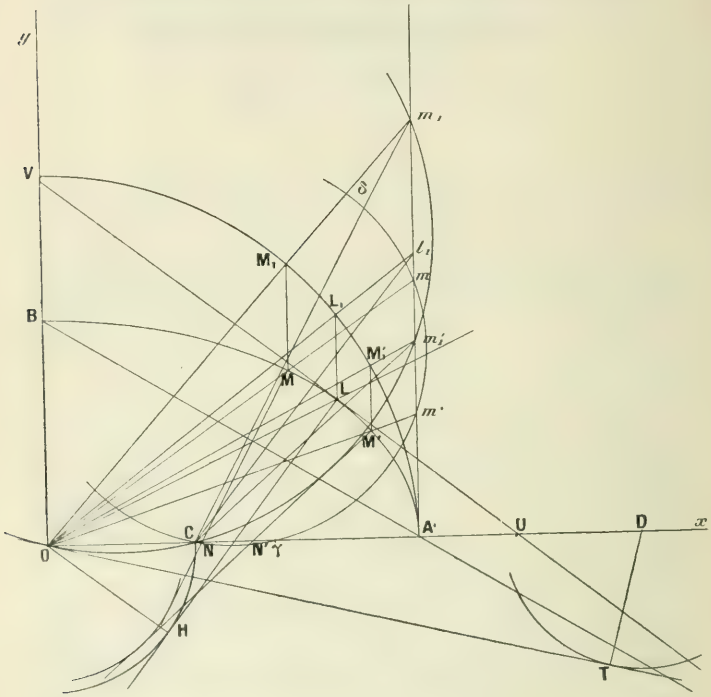
Nous dirons dans la suite de cette Note que les points M et M′ sont *associés* en sous-entendant : *en vertu du théorème de Fagnano*. Nous appellerons aussi *directions associées* celles des deux diamètres de l'ellipse aboutissant aux points M et M′.

On sait que le couple des points associés M et M′ n'est réel qu'autant que $r < a - b$, a et b étant les demi-axes OA et OB de l'ellipse. Lorsque $r = a - b$, les points M et M′ se confondent en un point L qu'on peut appeler *point limite;* son diamètre sera le *diamètre limite*. Ce point limite est également connu sous le nom de *point de Fagnano*.

2. Nous avons appelé *déviation* en un point d'une ellipse (¹) l'angle δ que la normale MN à la courbe en

(¹) Les Notes que nous avons consacrées à l'étude de cet élément ont paru dans les *Nouvelles Annales* en 1886 (p. 370) et 1888 (p. 268). Nous les désignerons ici comme Notes I et II.

ce point fait avec le diamètre correspondant OM_1 du cercle principal. Comme ces deux droites se coupent, ainsi qu'on sait, sur le cercle de centre O et de



rayon $a + b$, on a immédiatement

$$(1) \qquad r = (a + b) \sin \delta.$$

Il en résulte que *deux points associés* M *et* M' *sont des points de même déviation* et que *le point limite est le point de déviation maxima.* Cette simple remarque peut conduire à de nombreuses conséquences.

Nous rappellerons d'abord ce théorème contenu

dans notre Note II (p. 274) : *si, sur le demi-axe* OA, *on prend le point* C *tel que* $OC = a - b$, *et si le diamètre* OM_1 *du cercle principal coupe en* m_1 *la tangente au sommet* A, *la droite* Cm_1 *est parallèle à la normale en* M.

Il en résulte que *l'angle* Om_1C *est égal à la déviation* δ *pour le point* M et, par suite, que *les points* m_1 *et* m'_1 *correspondant aux points associés* M *et* M′ *sont, avec les points* O *et* C, *sur un même cercle.*

De plus, la tangente OT à ce cercle faisant avec OC l'angle δ, si l'on prend, sur le prolongement de OA, le point D tel que $AD = b$, on voit que *la distance* DT *de ce point à cette tangente est égale à* r, en vertu de (1).

De là, une solution très simple, par la règle et le compas, de ce problème : *construire le couple des points associés pour lesquels la différence* arc BM — arc AM′ *a une valeur donnée* r. Du point D comme centre avec le rayon r on décrit un cercle auquel on mène la tangente OT, puis on trace le cercle passant par O et C et tangent en O à OT. Il coupe la tangente à l'ellipse en son sommet A aux points m_1 et m'_1, et les droites Om_1 et Om'_1 donnent sur le cercle principal les points M_1 et M'_1 auxquels correspondent, sur l'ellipse, les points M et M′ cherchés.

Il suffit dès lors, pour avoir le point limite L, de mener par O et C le cercle tangent à Am_1 qu'il touche en l_1. La droite Ol_1 donne sur le cercle principal le point L_1 auquel correspond, sur l'ellipse, le point L demandé, et l'on vérifie que la normale en L à l'ellipse est tangente au cercle de centre O et de rayon OC.

3. Si nous désignons par μ_1 et μ'_1 les coefficients

angulaires des diamètres OM_1 et OM'_1 du cercle principal nous avons

$$(2) \qquad \mu_1 \mu'_1 = \frac{Am_1 . Am'_1}{OA^2} = \frac{AO . AC}{OA^2} = \frac{AC}{OA} = \frac{b}{a},$$

d'où nous déduisons pour les coefficients angulaires μ et μ' des diamètres correspondants OM et OM′ de l'ellipse, respectivement égaux aux précédents multipliés par $\frac{b}{a}$,

$$(3) \qquad \mu\mu' = \frac{b^3}{a^3}.$$

Remarquons en passant que si nous prenions les points de rencontre m et m' des diamètres associés OM et OM′ avec la tangente Al_1, nous aurions, en vertu de (3),

$$Am . Am' = \frac{b^3}{a} = \frac{b^2}{a} b.$$

Or $b = AC$, et, si γ est le centre de courbure répondant au sommet A, $A\gamma = \frac{b^2}{a}$; donc *les cercles circonscrits aux triangles tels que* Cmm' *passent tous par le centre de courbure* γ.

La formule (3) montre que, pour la direction limite, on a $\mu = \sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$, et la formule (2), pour le diamètre correspondant du cercle principal, $\mu_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Ces résultats se trouvent déjà dans notre Note I pour le point de déviation maxima dont nous venons de faire remarquer l'identité avec le point limite. Nous nous bornerons à rappeler quelques propriétés de ce point, obtenues dans cette Note ainsi que dans la Note II, dont, au reste, la démonstration est des plus aisées :

La tangente UV *au point limite a, sur* Ox, *même inclinaison que* OL_1. *Elle est divisée par le point de contact* L *en segments* LU *et* LV *respectivement égaux à b et à a. Donc, si l'on engendre l'ellipse au moyen du point séparatif des segments a et b sur la droite de longueur* $a + b$ *glissant par ses extrémités sur* Ox *et* Oy, UV *constitue la position de cette droite pour laquelle elle devient tangente à l'ellipse décrite. La distance du point* O *à cette tangente est égale à* $\sqrt{ab}$.

D'ailleurs, *le rayon de courbure au point* L *est aussi égal à* $\sqrt{ab}$ *et, par suite, le centre de courbure correspondant est la projection orthogonale* H *du centre* O *sur la normale en* L. *La droite* OH *est donc normale en* H *à la développée de l'ellipse; d'où se déduit que le centre de courbure* H *est le plus voisin du centre* O *de la courbe.*

4. On peut se proposer de trouver la relation qui existe entre les rayons de courbure en deux points associés.

L'expression bien connue du rayon de courbure ρ en un point de l'ellipse, en fonction de l'anomalie excentrique φ, peut s'écrire

$$(\rho ab)^{\frac{2}{3}} = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$$

ou, si μ_1 est le coefficient angulaire du diamètre correspondant du cercle principal,

$$(\rho ab)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 \mu_1^2 + b^2}{1 + \mu_1^2}.$$

Posant, pour simplifier l'écriture,

$$(4) \qquad \theta = (\rho ab)^{\frac{1}{3}},$$

on en déduit

$$\mu_1^2 = \frac{\theta^2 - b^2}{a^2 - \theta^2}. \tag{5}$$

Remplaçant μ_1 et μ'_1 par leurs valeurs (5) dans (2) on a

$$\frac{(\theta^2 - b^2)(\theta'^2 - b^2)}{(a^2 - \theta^2)(a^2 - \theta'^2)} = \frac{b^2}{a^2}$$

ou, après des réductions faciles,

$$\theta\theta' = ab,$$

d'où aussi, en remplaçant θ et θ' par leurs valeurs tirées de (4),

$$\rho\rho' = ab. \tag{6}$$

Ainsi, *le produit des rayons de courbure en deux points associés est constant et égal au produit des demi-axes.*

On tire immédiatement de là pour le rayon de courbure au point limite l'expression $\sqrt{ab}$ indiquée plus haut.

Comme, d'autre part, si h est la distance du centre à la tangente en M, on a [1]

$$\rho h^3 = a^2 b^2,$$

on voit qu'on a encore

$$hh' = ab,$$

---

[1] Nous avons indiqué dans les *Nouvelles Annales* (1902, p. 231) la façon dont nous avons obtenu ce théorème énoncé par nous sous forme de la question 1919 (*N. A.*, 1902, p. 48). Une solution de cette question a été donnée (1903, p. 91) par M. Chassiotis qui a, depuis lors, rectifié lui-même (même tome, p. 515) une observation fautive qu'il y avait ajoutée. Il est clair qu'on pourrait, tout aussi facilement, démontrer directement la formule $hh' = ab$, et en déduire par un calcul inverse la valeur de $\rho\rho'$.

c'est-à-dire que *le produit des distances du centre aux tangentes en deux points associés est aussi constant et égal au produit des demi-axes*, d'où résulte immédiatement que la distance du centre à la tangente au point limite est égale à $\sqrt{ab}$, ainsi qu'on l'a rappelé ci-dessus.

5. On est dans l'habitude de ne considérer les points associés en vertu du théorème de Fagnano que sur un même quadrant d'ellipse. Mais, en réalité, les huit points, à raison de deux par quadrant, pour lesquels la distance du centre à la normale est r, peuvent être associés autrement de façon à définir encore des arcs dont la différence soit égale à r.

Ces huit points formant les sommets de deux rectangles ayant leurs côtés parallèles aux axes de l'ellipse, chacun d'eux peut être associé à chacun des quatre sommets de l'autre rectangle, ce qui donne en tout seize couples de points pour chaque valeur de r. Mais, un examen facile montre qu'il y a lieu de distinguer, d'une part, les couples constitués par deux points associés appartenant à un même quadrant ou à deux quadrants opposés par le sommet, que nous appellerons de la *première espèce*, et, d'autre part, les couples constitués par deux points associés situés dans deux quadrants contigus, que nous appellerons de la *deuxième espèce*.

Au point de vue de l'application du théorème de Fagnano, pour les couples de la première espèce, les arcs BM (ou B'M) et AM' (ou A'M') doivent être pris *en sens contraire* (c'est le cas des couples ordinairement envisagés); pour ceux de la deuxième, ces arcs doivent être pris *dans le même sens*.

Dans le premier cas, la relation entre les directions

associées est définie par la formule (3) ci-dessus; dans le second, par la formule

$$(3^{bis}) \qquad \mu\mu' = -\frac{b^3}{a^3}.$$

6. Si nous considérons les cordes unissant les points associés de l'une ou de l'autre espèce, nous pouvons nous proposer de trouver leur enveloppe. Traitons d'abord le problème dans le cas de la deuxième espèce.

L'équation de l'ellipse étant écrite

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

si nous représentons la corde unissant les points associés M et M′ par l'équation

$$y = mx + n,$$

nous avons immédiatement, pour le faisceau des deux diamètres OM et OM′, l'équation

$$a^2(b^2 - n^2)y^2 - 2ma^2b^2xy + b^2(m^2a^2 - n^2)x^2 = 0,$$

d'où nous tirons

$$\mu\mu' = \frac{b^2(m^2a^2 - n^2)}{a^2(b^2 - n^2)}.$$

Portant cette valeur dans (3bis), nous obtenons

$$a(m^2a^2 - n^2) = b(n^2 - b^2),$$

d'où

$$n = \sqrt{\frac{m^2a^3 + b^3}{a + b}}.$$

L'équation de la corde est donc

$$y = mx + \sqrt{\frac{m^2a^3 + b^3}{a + b}}.$$

On peut l'écrire

$$(a+b)(y-mx)^2 = m^2a^3 + b^3$$

ou

$$m^2[(a+b)x^2 - a^3] - 2(a+b)xym + (a+b)y^2 - b^3 = 0,$$

d'où, immédiatement, son enveloppe

$$(a+b)^2x^2y^2 - [(a+b)x^2 - a^3][(a+b)y^2 - b^3] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3} = \frac{1}{a+b},$$

ellipse dont les demi-axes α et β sont donnés par

$$\alpha^2 = \frac{a^3}{a+b}, \qquad \beta^2 = \frac{b^3}{a+b}.$$

Autrement dit : *les demi-axes α et β sont les coordonnées du point limite* L.

Ainsi : *l'enveloppe des cordes unissant les couples de la seconde espèce est l'ellipse $\mathcal{E}$ de centre* O, *ayant ses axes dirigés suivant* Ox *et* Oy, *et qui est inscrite dans le rectangle formé par les points limites des quatre quadrants.*

Cette ellipse $\mathcal{E}$ est nécessairement aussi *inscrite dans le losange formé par les sommets de l'ellipse donnée*, dont les côtés sont à la fois des cordes de la première et de la deuxième espèce. La vérification analytique de ce fait est d'ailleurs des plus faciles.

On trouve ainsi que le point de contact de l'ellipse $\mathcal{E}$ avec AB appartient à la droite

$$x - y = a - b,$$

c'est-à-dire à la parallèle à la bissectrice de l'angle AOB, menée par le point C.

7. Ayant une corde de la seconde espèce, pour en obtenir une de la première, il suffit, conservant une de ses extrémités, de prendre la symétrique de l'autre par rapport à l'un ou à l'autre des axes. L'ellipse précédente permet ainsi de construire toutes les cordes des deux espèces. Mais on peut, par un calcul calqué sur le précédent, obtenir aussi, si l'on veut, l'enveloppe des cordes de la première espèce. Il suffit, pour cela, de faire usage de la formule (3) au lieu de (3bis). Cela donne

$$\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{b^3} = \frac{1}{a-b},$$

hyperbole $\mathcal{H}$ ayant pour asymptotes les droites

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b^3}{a^3}},$$

c'est-à-dire les diamètres limites de l'ellipse donnée. Cette hyperbole est, elle aussi, tangente aux côtés du losange formé par les sommets de cette ellipse, auquel, vu sa situation extérieure, nous la dirons *ex-inscrite*.

L'hyperbole $\mathcal{H}$ et l'ellipse $\mathcal{E}$, enveloppes des cordes unissant les points associés de la première et de la seconde espèce, se prêtent encore à une autre détermination de ces couples de points; en effet, les relations (3) et (3bis) caractérisent respectivement des couples de directions conjuguées dans l'hyperbole $\mathcal{H}$ et dans l'ellipse $\mathcal{E}$. On peut donc dire que *les couples de directions associées de chaque espèce sont en même temps des couples de directions conjuguées par rapport à la conique enveloppe répondant à cette espèce*. Et cela fournit un nouveau moyen d'engendrer les divers couples de points associés.

On remarquera enfin que, dans le cas de la première espèce, l'hyperbole $\mathcal{H}$ est tangente aux quatre droites

qui touchent l'ellipse en ses points limites (qui sont des cordes limites), et que les tangentes à cette hyperbole, qui se rapprochent, à partir de celles-ci, des tangentes en ses sommets situés sur Ox, ne coupent plus l'ellipse donnée en des points réels, tandis que, dans le cas de la deuxième espèce, toutes les tangentes à l'ellipse $\mathcal{E}$ fournissent des couples réels de points associés.

[M^{4}e]

SUR LA SPIRALE TRACTRICE ET SUR UNE COURBE ASSOCIÉE;

PAR M. F. BALITRAND.

La spirale tractrice est caractérisée par la propriété suivante : la portion de tangente MT, comprise entre le point de contact M et le point de rencontre T de cette tangente avec la perpendiculaire OT, élevée au rayon vecteur OM, par le pôle O, est constante.

D'après M. Gomes Teixeira [1], cette courbe a été étudiée par Varignon, puis par Cotes dans l'*Harmonia mensurarum*. Ce dernier a pris comme définition cette propriété « qu'un arc quelconque, compté à partir du point de rebroussement, est proportionnel au logarithme du rayon vecteur de son extrémité ». Dans les *Nouvelles Annales*, elle a fait l'objet d'articles de Giard (1862, p. 70), de Rouquel (1863, p. 499), de Laquière (1863, p. 549). M. Gomes Teixeira lui a consacré (*loc. cit.*) un Chapitre de son Traité.

---

[1] *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. II, p. 90.

La spirale tractrice est un cas particulier de la tractrice circulaire. — En effet, si l'on désigne par $2a$ la longueur constante MT et si N est le milieu de MT, on a

$$ON = MN = a;$$

donc le lieu du point N est un cercle de centre O. La courbe est par suite une tractrice circulaire particulière, correspondant au cas où le segment de longueur constante est égal au rayon du cercle que décrit une de ses extrémités.

La propriété caractéristique de la spirale se traduit par

$$(1) \qquad r = 2a \cos V;$$

r est le rayon vecteur et V l'angle sous lequel il coupe la courbe.

Cette relation si simple permet de retrouver ses propriétés essentielles plus rapidement que son équation polaire, assez compliquée. Rappelons les formules

$$\tang V = \frac{r\,d\omega}{dr},$$

$$\sin V = \frac{r\,d\omega}{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\omega^2}} = \frac{r\,d\omega}{ds},$$

$$\cos V = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\omega^2}} = \frac{dr}{ds},$$

où ω désigne l'angle polaire du point M. De la relation (1) on déduit

$$dr = -2a \sin V\,dV.$$

Par suite

$$ds = -2a \tang V\,dV, \qquad s = 2a \log \cos V = 2a \log \frac{r}{2a},$$

en comptant les arcs à partir du point de rebroussement

de la courbe. Cette formule établit le théorème de Cotes cité plus haut. On peut encore l'écrire

$$r = 2ae^{\frac{s}{2a}}.$$

Appelons r_1 et V_1 les éléments, analogues à r et V, de la courbe dont la spirale est la podaire. En vertu de (1) et de la propriété fondamentale des podaires, on a

$$r_1 \operatorname{tang} V_1 = 2a, \qquad V_1 = V.$$

Mais la première de ces relations exprime que la sous-tangente polaire de la courbe (r_1, V_1) est constante, propriété caractéristique de la spirale hyperbolique. Donc :

La spirale tractrice est la podaire de la spirale hyperbolique par rapport à son pôle.

Si maintenant r_1 et V_1 désignent les éléments de la courbe inverse de la spirale tractrice, on a

$$r_1 \cos V_1 = -2a, \qquad V_1 = \pi - V.$$

Mais $r_1 \cos V_1$ représente la distance du pôle à la normale à la courbe (r_1, V_1); cette normale enveloppe donc un cercle; autrement dit la courbe (r_1, V_1) est une développante de ce cercle. Ainsi :

La spirale tractrice est l'inverse de la développante d'un cercle, par rapport au centre de ce cercle.

De la relation

$$\sin V = \frac{r\,d\omega}{ds}$$

on déduit sans peine

$$d\omega = -\operatorname{tang}^2 V\, dV, \qquad \omega = V - \operatorname{tang} V.$$

Ensuite, en appelant α l'angle que fait la tangente avec l'axe polaire et ρ le rayon de courbure en M, on a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}, \qquad \alpha = \omega + V;$$

d'où

$$\rho = -a \operatorname{tang} 2V;$$

ce qui fournit, pour le centre de courbure de la spirale, la construction suivante :

Le centre de courbure C, *en* M, *est à l'intersection de la normale en ce point et de la droite qui joint le pôle* O *au milieu* N *de la tangente* MT; ou, ce qui revient au même :

Le rayon de courbure en M *est égal à la portion de la perpendiculaire, élevée en* O *à* OM, *comprise entre le pôle* O *et la tangente* MT.

Il convient de noter, à cause de leur simplicité, les relations

$$\frac{ds}{d\omega} = 2a \cot V, \qquad \frac{d\omega}{dV} = -\operatorname{tang}^2 V = -\frac{HT}{HM},$$

H étant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur MT. Au moyen des formules ci-dessus, on arrive à la construction du *centre de courbure de la développée de la spirale*. En effet, si ρ_1 et s_1 désignent le rayon de courbure et l'arc de cette développée, on sait que

$$ds_1 = d\rho, \qquad \rho_1 = \frac{ds_1}{d\alpha}.$$

Après quelques calculs faciles on trouve

$$\rho_1 = \frac{2a \cos^2 V}{\cos^3 2V};$$

ce qui conduit à la détermination suivante du rayon de courbure :

Mener par le point O *une parallèle à* MT *et par le point* C *une perpendiculaire à* OC; *ces deux droites se coupent en un point* α; *la droite* αN *coupe la normale en* C *en* C_1; CC_1 *est égal au rayon de courbure.*

En effet, les deux triangles semblables NCC_1, $NO\alpha$ donnent

$$\frac{CC_1}{O\alpha} = \frac{NC}{ON}, \qquad CC_1 = \frac{NC}{ON} \times \frac{OC}{\cos 2V} = \frac{NC(ON + NC)}{ON \cos 2V};$$

en remplaçant ON et NC par leurs valeurs en fonction de V, on trouve bien

$$\rho_1 = CC_1 = \frac{2a \cos^2 V}{\cos^3 2V}.$$

Proposons-nous enfin de trouver l'équation tangentielle polaire de la spirale, c'est-à-dire la relation entre la distance p du pôle à la tangente et l'angle φ de la normale avec l'axe polaire. Dans le triangle OHN on a

$$OH = p, \qquad HN = \frac{dp}{d\varphi};$$

d'où

$$(2) \qquad p = a \sin 2V, \qquad \frac{dp}{d\varphi} = 2a \cos^2 V.$$

On en déduit l'équation différentielle

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2 - 2a \frac{dp}{d\varphi} + p^2 = 0;$$

d'où

$$d\varphi = \frac{dp}{a \pm \sqrt{a^2 - p^2}}$$

et, en intégrant,

$$\varphi - \varphi_0 = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{a \pm \sqrt{a^2 - p^2}}{p} - \frac{a \pm \sqrt{a^2 - p^2}}{p};$$

c'est l'équation cherchée; mais il est plus commode, pour les applications, d'utiliser les formules (2).

Supposons maintenant que la spirale roule sur la tangente MT comme base et proposons-nous d'étudier la roulette (O) décrite par le pôle. De la définition de la spirale, il résulte que cette roulette est caractérisée par la propriété suivante :

La tangente et la normale en chaque point de la courbe, détachent sur la base un segment de longueur constante $2a$ (¹).

Les coordonnées d'un point de la roulette sont données par les formules

$$x = \int p\, d\varphi, \qquad y = p;$$

ou bien, puisque, en vertu des formules (2),

$$d\varphi = \frac{\cos 2V}{\cos^2 V}\, dV = \left(2 - \frac{1}{\cos^2 V}\right) dV,$$

par

$$dx = 2a\left(\sin 2V - \frac{\sin V}{\cos V}\right) dV, \qquad y = a \sin 2V.$$

En intégrant on obtient

$$x = -a \cos 2V + a \log \cos^2 V, \qquad y = a \sin 2V.$$

Si $d\sigma$ désigne l'élément d'arc de la roulette, on a

$$d\sigma = \frac{r}{\rho}\, ds;$$

(¹) Cette courbe est connue. *Voir* TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 223. Pour les formules employées ici, se reporter à un article récent des *Nouvelles Annales : Note sur la théorie des roulettes*, etc.

et, en remplaçant r, ρ, ds par leurs valeurs en fonction de V,

$$d\sigma = \frac{2a\cos 2V}{\cos V}\,dV.$$

Quant au rayon de courbure de la roulette qui a pour expression

$$R = \frac{r^2}{\rho \sin V - r},$$

il devient, en y remplaçant r et ρ par leurs valeurs,

$$R = -\frac{2a\cos 2V}{\cos V}.$$

Cette formule conduit à la construction suivante :

Élever au point M *une perpendiculaire à* OM *qui coupe* ON *en* N'; *la perpendiculaire abaissée de* N' *sur la base coupe* OM *au centre de courbure* γ.

On peut encore dire que :

La perpendiculaire élevée à la base par le point N *passe par le milieu* I *du rayon de courbure.*

Et aussi que :

La projection sur la base du rayon de courbure est double de la projection de ON.

L'expression du rayon de courbure R peut s'écrire

$$R = -4a\cos V + \frac{2a}{\cos V}.$$

En la différentiant on obtient

$$\frac{dR}{dV} = 4a\sin V + \frac{2a\sin V}{\cos^2 V}.$$

On a

$$R_1 = -\frac{dR}{dV},$$

en appelant R_1 le rayon de courbure de la développée de la roulette O; ce qui donne pour ce rayon de courbure la construction suivante :

La perpendiculaire élevée à OM *par le milieu* K *de* OI *coupe la base en* L; *la droite* IL *passe par le milieu du rayon de courbure de la développée.*

En effet, les triangles semblables MOT, MKL donnent

$$\frac{KL}{OT} = \frac{KM}{OM}$$

ou bien

$$KL = \tang V \times KM.$$

Mais

$$KM = OM + \frac{R}{4} = a \cos V + \frac{a}{2 \cos V},$$

donc

$$KL = a \sin V + \frac{a \sin V}{2 \cos^2 V} = \frac{R_1}{4},$$

ce qui démontre le théorème ci-dessus.

Le segment ON est égal à a. Il a une longueur constante et, lorsque le point O décrit la roulette (O), une de ses extrémités se déplace sur cette courbe, tandis que l'autre reste sur la base. Pour un déplacement infiniment petit, le point I est le centre instantané de rotation et le cercle circonscrit au quadrilatère inscriptible INKL est le cercle des inflexions; on le vérifie aisément. On peut donc construire la normale à la courbe décrite par le point I (c'est la droite IL), ainsi que le point de contact et le centre de courbure de la courbe enveloppée par le segment ON.

[K¹5c]

NOTE SUR LA BROCARDIENNE;

PAR M. A. AURIC.

Soient un triangle de référence $A_1A_2A_3$ et un point M dont les coordonnées barycentriques sont

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3;$$

nous appellerons *brocardienne* B du point M la conique ayant pour équation

$$\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - m_1^2 x_2 x_3 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_2 x_3 & m_3 x_1 & m_1 x_2 \\ m_3 x_2 & m_1 x_3 & m_2 x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est symétrique en m_i et x_i; on sait d'ailleurs que la brocardienne passe par le point M, par les points brocardiens

$$\frac{1}{m_2}, \quad \frac{1}{m_3}, \quad \frac{1}{m_1}; \qquad \frac{1}{m_3}, \quad \frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{m_2};$$

par les sommets des deux triangles brocardiens

$$m_1, \quad m_3, \quad m_2; \qquad m_3, \quad m_2, \quad m_1; \qquad m_2, \quad m_1, \quad m_3;$$

$$m_2 + m_3 - m_1, \quad m_2, \quad m_3; \qquad m_1, \quad m_3 + m_1 - m_2, \quad m_3;$$

$$m_1, \quad m_2, \quad m_1 + m_2 - m_3;$$

enfin par le centre de la conique circonscrite

$$\Sigma m_1 x_2 x_3 = 0,$$

soit

$$m_1(m_2+m_3-m_1),\quad m_2(m_3+m_1-m_2),$$
$$m_3(m_1+m_2-m_3).$$

On pourrait trouver aisément d'autres points réels à coordonnées simples situés sur B, par exemple

$$\frac{m_2^3+m_3^3}{m_2m_3}-m_1,\quad m_3,\quad m_2;\qquad m_3,\quad \frac{m_3^3+m_1^3}{m_3m_1}-m_2,\quad m_1;$$
$$m_2,\quad m_1,\quad \frac{m_1^3+m_2^3}{m_1m_2}-m_3;$$

mais les propriétés caractéristiques de la brocardienne paraissent résulter surtout de la considération de points imaginaires.

j, j^2 étant les racines cubiques de l'unité, introduisons les points

$$M_1=(m_1,\ m_2j,\ m_3j^2),\qquad M_2=(m_1,\ m_2j^2,\ m_3j),$$
$$G=(1,\ 1,\ 1),\qquad G_1=(1,\ j,\ j^2),\qquad G_2=(1,\ j^2,\ j).$$

On démontre facilement que la brocardienne est circonscrite à MM_1M_2 [1] et que son discriminant est constitué par les côtés des triangles $A_1A_2A_3$ et GG_1G_2; en d'autres termes, lorsque le point représentatif M se trouve sur le périmètre d'un de ces deux triangles, la brocardienne se décompose en deux droites.

Pour $m_1=0$, B s'écrit

$$x_1(m_2m_3x_1-m_3^2x_2-m_2^2x_3)=0;$$

de même B s'écrit

$$(x_1+x_2+x_3)(m_2m_3x_1+m_3m_1x_2+m_1m_2x_3)$$
$$-(m_1+m_2+m_3)(m_1x_2x_3+m_2x_3x_1+m_3x_1x_2)=0$$

---

[1] *Voir* notre Note *Sur les triangles hexahomologiques* (*C. R. Acad. Sc.*, 26 juillet 1915).

ou

$$(x_1 + jx_2 + j^2x_3)(m_2m_3x_1 + j^2m_3m_1x_2 + jm_1m_2x_3)$$
$$-(m_1 + j^2m_2 + jm_3)(m_1x_2x_3 + jm_2x_3x_1 + j^2m_3x_1x_2) = 0,$$

ce qui donne la décomposition de B pour

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0$$

et pour

$$m_1 + j^2m_2 + jm_3 = 0.$$

La première formule montre que B est homothétique à

$$\Sigma m_1x_2x_3 = 0$$

dont le centre est précisément sur B.

Pour que B soit un cercle il faut que

$$m_1 = a_1^2, \qquad m_2 = a_2^2, \qquad m_3 = a_3^2.$$

M est donc dans ce cas le point de Lemoine.

La considération des points M_1, M_2 fournit immédiatement deux nouveaux triangles inscrits dans la brocardienne et dont les sommets sont

$$\begin{array}{l}
m_2 + m_3j - m_1j^2, \quad m_2j, \quad m_3; \\
m_1, \quad m_3 + m_1j - m_2j^2, \quad m_3j; \\
m_1j, \quad m_2, \quad m_1 + m_2j - m_3j^2; \\
m_2 + m_3j^2 - m_1j, \quad m_2j^2, \quad m_3; \\
m_1, \quad m_3 + m_1j^2 - m_2j, \quad m_3j^2; \\
m_1j^2, \quad m_2, \quad m_1 + m_2j^2 - m_3j.
\end{array}$$

Nous appellerons *brocardienne générale* la conique ayant pour équation

$$\Sigma\lambda m_2m_3x_1^2 + 2m_1^2x_2x_3 = 0.$$

Son discriminant est

$$\Delta = -m_1m_2m_3[\lambda(m_1^3 + m_2^3 + m_3^3) + (\lambda^3 + 2)m_1m_2m_3].$$

Pour que la cubique figurant entre crochets se réduise à trois droites il faut (indépendamment des valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$ qui donnent $m_1 m_2 m_3 = 0$) que $\frac{\lambda^3 + 2}{\lambda}$ soit égal à 3 ou à $3j$ ou à $3j^2$.

On a donc, pour déterminer λ, trois équations qui ont chacune : une racine simple

$$\lambda = -2, \qquad -2j^2, \qquad -2j,$$

et une racine double

$$\lambda = 1, \qquad j^2, \qquad j.$$

C'est la racine simple qui conduit à la brocardienne ordinaire réelle

$$\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - m_1^2 x_2 x_3 = 0$$

et à ses deux associées imaginaires

$$(B_1) \qquad j\,\Sigma m_2 m_3 x_1^2 - \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0,$$

$$(B_2) \qquad j^2 \Sigma m_2 m_3 x_1^2 - \Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0.$$

Si nous considérons les points

$$J_1^1 = (j, 1, 1), \qquad J_1^2 = (j^2, 1, 1),$$
$$J_2^1 = (1, j, 1), \qquad J_2^2 = (1, j^2, 1),$$
$$J_3^1 = (1, 1, j), \qquad J_3^2 = (1, 1, j^2),$$
$$M_1^1 = (jm_1, m_2, m_3), \qquad M_1^2 = (j^2 m_1, m_2, m_3),$$
$$M_2^1 = (m_1, jm_2, m_3), \qquad M_2^2 = (m_1, j^2 m_2, m_3),$$
$$M_3^1 = (m_1, m_2, jm_3), \qquad M_3^2 = (m_1, m_2, j^2 m_3),$$

les brocardiennes B_1 et B_2 sont respectivement circonscrites à $M_1^1 M_2^1 M_3^1$ et à $M_1^2 M_2^2 M_3^2$ et ont pour discriminants les cubiques formées par les côtés des triangles

$$J_1^1 J_2^1 J_3^1 \qquad \text{et} \qquad J_1^2 J_2^2 J_3^2$$

indépendamment du triangle de référence; nous les appellerons *brocardiennes circonscrites*.

A la racine double correspondent des brocardiennes qui ont mêmes discriminants que les précédentes, mais qui sont conjuguées par rapport aux triangles

$$MM_1M_2, \quad M_1^1M_2^1M_3^1, \quad M_1^2M_2^2M_3^2 \text{ (1)};$$

nous les appellerons *brocardiennes conjuguées*. Leur équation est

$$\alpha\Sigma m_2m_3x_1^2 + 2\Sigma m_1^2x_2x_3 = 0 \qquad (\alpha = 1, j, j^2)$$

et il est facile d'établir leurs nombreuses propriétés (2).

Si l'on pose

$$x_1 = m_1y_1, \qquad x_2 = m_2y_2, \qquad x_3 = m_3y_3,$$

la brocardienne générale devient

$$\Sigma m_1(\lambda y_1^2 + 2y_2y_3) = 0,$$

qui représente la conique d'un réseau linéaire de trois coniques.

Pour $\lambda = -2$, elle est circonscrite à GG_1G_2 et, pour $\lambda = 1$, elle est conjuguée à ce même triangle comme on pouvait s'y attendre.

Posant

$$y_1 = m_1z_1, \qquad y_2 = m_2z_2, \qquad y_3 = m_3z_3,$$

il vient

$$\frac{\lambda}{2m_1m_2m_3}\Sigma m_1^3z_1^2 + \Sigma z_2z_3 = 0.$$

Cette équation représente une conique d'un faisceau linéaire de deux coniques dont l'une est fixe et dont l'autre ne dépend que de m_1^3, m_2^3, m_3^3; c'est ce qui explique l'introduction des racines cubiques de

(1) Les triangles $A_1A_2A_3$, MM_1M_2, $M_1^1M_2^1M_3^1$ et $M_1^2M_2^2M_3^2$ sont hexahomologiques entre eux deux à deux (voir *C. R. Acad. Sc.*, t. CLXI, p. 275).

(2) *Voir*, dans les *Exercices de Kœler*, l'étude d'un réseau remarquable de trois coniques.

l'unité dans les coordonnées des points considérés précédemment.

Soient deux points

$$P = (p_1, p_2, p_3), \qquad Q = (q_1, q_2, q_3),$$

nous appellerons *droite brocardienne* de P, Q la droite

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_2 q_3 & p_3 q_1 & p_1 q_2 \\ p_3 q_2 & p_1 q_3 & p_2 q_1 \end{vmatrix} = \Sigma x_1 (p_2 p_3 q_1^2 - p_1^2 q_2 q_3) = 0.$$

Cette droite passe par les points S_1, S_2

$$p_2 q_3, \quad p_3 q_1, \quad p_1 q_2; \qquad p_3 q_2, \quad p_1 q_3, \quad p_2 q_1,$$

que nous appellerons *brocardiens généraux* de P et de Q et par les points

$$(T_1) \qquad p_2 q_3 + p_3 q_2, \quad p_3 q_1 + p_1 q_3, \quad p_1 q_2 + p_2 q_1,$$
$$(T_2) \qquad p_2 q_3 - p_3 q_2, \quad p_3 q_1 - p_1 q_3, \quad p_1 q_2 - p_2 q_1,$$

qui sont conjugués harmoniques par rapport aux précédents et qui jouent un rôle important dans la géométrie du triangle [1].

Pour que le point

$$x_1 = p_1^2 m_2 m_3 - p_2 p_3 m_1^2, \qquad x_2 = p_2^2 m_3 m_1 - p_3 p_1 m_2^2,$$
$$x_3 = p_3^2 m_1 m_2 - p_1 p_2 m_3^2,$$

situé sur la droite brocardienne de P et de M, appartienne à la brocardienne ordinaire B, il faut que le point P se trouve soit sur la droite $G_1 G_2$ (ou droite de l'infini), soit sur le périmètre du triangle MM_1M_2.

---

[1] Dans notre Note sur la lemoinienne, le point de rencontre de deux axes d'homologie $\Delta_{12}\Delta_{13}$ est un point T_2 et le pôle de l'axe associé Δ_{23} par rapport à L est un point T_1.

Nous avons ainsi une transformation de droite en brocardienne B.

En particulier, lorsque P est en G_1 ou G_2, nous obtenons deux nouveaux points remarquables de la brocardienne B :

$$m_2 m_3 - m_1^2, \quad j\,(m_3 m_1 - m_2^2), \quad j^2(m_1 m_2 - m_3^2);$$
$$m_2 m_3 - m_1^2, \quad j^2(m_3 m_1 - m_2^2), \quad j\,(m_1 m_2 - m_3^2).$$

L'équation tangentielle de la brocardienne générale est

$$\Sigma(m_1^4 u_1^2 - 2 m_2^2 m_3^2 u_2 u_3)$$
$$- \lambda m_1 m_2 m_3 \Sigma\,[m_1(\lambda u_1^2 - 2 u_2 u_3)] = 0.$$

Les coordonnées du centre de la brocardienne B sont [1]

$$\frac{m_1}{m_2 - m_3} + K, \quad \frac{m_2}{m_3 - m_1} + K, \quad \frac{m_3}{m_1 - m_2} + K,$$

avec

$$K = \frac{3\, m_1 m_2 m_3}{(m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)};$$

celles du centre de la brocardienne conjuguée réelle sont

$$\frac{m_1}{m_2 - m_3}, \quad \frac{m_2}{m_3 - m_1}, \quad \frac{m_3}{m_1 - m_2};$$

ce point se trouve à l'intersection des deux coniques circonscrites

$$\sum \frac{m_1}{x_1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{m_1^2}{x_1} = 0;$$

il en résulte que les centres des deux brocardiennes

---

[1] Ces coordonnées s'écrivent également

$$m_1^2(m_2 + m_3 - m_1) + 2 m_1 m_2 m_3,$$
$$m_2^2(m_3 + m_1 - m_2) + 2 m_1 m_2 m_3,$$
$$m_3^2(m_1 + m_2 - m_3) + 2 m_1 m_2 m_3.$$

sont collinéaires avec G et avec le point

$$m_1^2(m_2+m_3-m_1), \qquad m_2^2(m_3+m_1-m_2),$$
$$m_3^2(m_1+m_2-m_3).$$

Dans la brocardienne générale la coordonnée ξ_1 du centre est égale à

$$m_1^2(m_2^2+m_3^2-m_1^2)+\lambda m_1 m_2 m_3(\lambda m_1-m_2-m_3);$$

il en résulte que ce point est collinéaire avec le centre de la conique circonscrite

$$\Sigma m_1^2 x_2 x_3 = 0,$$

et le point

$$\lambda m_1-m_2-m_3, \qquad \lambda m_2-m_3-m_1, \qquad \lambda m_3-m_1-m_2.$$

Pour des valeurs de λ égales et de signe contraire, les centres des brocardiennes correspondantes sont collinéaires avec le point

$$m_2+m_3, \qquad m_3+m_1, \qquad m_1+m_2.$$

[M¹5kα]

A PROPOS DE LA QUESTION 1491;

PAR M. F.-GOMES TEIXEIRA.

Je désirerais présenter quelques remarques sur la question 1491, récemment résolue par M. Brocard (1915, p. 138).

J'ai considéré cette question (p. 55) dans le Tome I de mon *Traité des courbes spéciales* où j'ai démontré que le lieu des points d'où l'on voit deux segments recti-

lignes A_1A_2, $A'_1A'_2$ dans des angles égaux ou supplémentaires, est formé de deux cubiques circulaires, et que l'équation d'une de ces courbes, quand on prend le point A_1 pour origine des coordonnées et la droite A_1A_2 pour axe des abscisses, les coordonnées des points A_2, A'_1, A'_2 étant respectivement $(0, a)$, (α, β), (α', β'), est

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)[(\beta'-\beta)x+(a+\alpha-\alpha')y]\\ =[\alpha\beta'-\beta\alpha'+a(\beta'-\beta)]x^2+[\alpha\beta'-\beta\alpha'+a(\beta+\beta')]y^2\\ +2\alpha axy-a(\alpha\alpha'+\beta\beta')y-a(\alpha\beta'-\beta\alpha')x.\end{aligned}$$

J'ai fait voir aussi qu'en transportant l'origine des coordonnées au *foyer singulier* de la courbe et en prenant pour nouvel axe des abscisses la droite perpendiculaire à l'asymptote réelle, l'équation de cette courbe prend la forme

$$x(x^2+y^2)=A(x^2+y^2)-Bx-Cy,$$

A, B, C ayant des valeurs que nous n'écrivons pas ici.

La courbe considérée est donc identique à celle rencontrée par Van Rees en cherchant les *focales* du cône elliptique, dans la *Correspondance mathématique* de Quételet (T. V, 1829, p. 361), courbe que j'ai désignée dans l'Ouvrage susmentionné sous le nom de *focale de Van Rees*.

Ajoutons que Van Rees a démontré qu'à chaque couple de points A_1, A_2 de la courbe arbitrairement choisis correspondent deux points A'_1, A'_2, tels que les cordes A_1A_2 et $A'_1A'_2$ sont vues de tous les points de la courbe sous des angles égaux ou supplémentaires.

Ajoutons encore que le lieu considéré est identique à celui d'un point tel que le produit de ses distances à deux pôles soit égal au produit de ses distances à deux autres.

Ajoutons enfin que les lignes considérées sont comprises dans une classe très générale de courbes envisagées par M. Darboux dans son important Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces* (3e Partie, 1873).

Si $\beta = \beta'$, $a = \alpha' - \alpha$, c'est-à-dire si les points A_1, A_2, A'_1, A'_2 sont les sommets d'un parallélogramme, la courbe considérée se réduit à une hyperbole équilatère et à une droite.

REMARQUE AU SUJET DE LA QUESTION 2249.

La détermination de la tangente, que la question 2249 demande de rechercher, est explicitement formulée dans le paragraphe III de l'énoncé de la question 1953 (*N. A.*, 1903, p. 47), proposée par M. d'Ocagne, et dont l'auteur a lui-même donné la solution (1905, p. 188).

L'objet de la question 2249 peut donc se borner à la détermination du centre de courbure.

La Rédaction.

EXERCICES (AGRÉGATION).

Calcul.

En axes rectangulaires, une surface (S) est enveloppée par le plan d'équation :

$$x\cos\varphi\cos\psi + y\cos\varphi\sin\psi + z\sin\varphi$$
$$= (\cos\varphi + \sin\varphi)\sin 2\psi + (2 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi)(1 - \cos 2\psi);$$

déterminer celles des normales de cette surface qui passent par l'origine des coordonnées. (L'équation du troisième degré dont dépend la question pourra être résolue trigonométriquement.)

Mécanique.

1° Une courbe (C) située dans un plan Oxy, rapporté à des axes rectangulaires (Ox, Oy), est assujettie à se déplacer en restant en contact avec la droite fixe Ox, au point fixe O. Comment peut-on définir cinématiquement le mouvement du plan de la courbe (C) sur le plan fixe Oxy?

2° Soit (Γ) la roulette engendrée par un point A invariablement lié à la courbe (C); on impose la courbe (Γ) et l'on demande de déterminer les courbes (C) correspondantes.

On examinera, en particulier, le cas où la roulette imposée est une ligne droite et le cas où cette même courbe imposée est la parabole d'équation

$$x = 1 + y^2.$$

3° La courbe imposée (Γ) est une circonférence. Discuter les courbes correspondantes (C). Examiner si l'une des courbes (C) peut admettre une inflexion ou une singularité.

Plus particulièrement encore, on suppose que la circonférence (Γ) imposée est une circonférence tangente à l'axe Oy au point O; construire alors et essayer de définir géométriquement les courbes correspondantes (C).

1° Dans un plan vertical, déterminer une courbe plane sur laquelle un point matériel pesant, assujetti à rester sans frottement, exerce une pression constante.

Quel est l'hodographe des vitesses? Déterminer la loi du mouvement.

2° Étudier tout particulièrement le cas où la pression serait égale au poids du point matériel.

3° Une des courbes du 2° étant supposée matérialisée, on place sur elle un point matériel pesant. Quelles sont les modifications qui doivent être apportées aux calculs précédents, si l'on admet l'existence d'un frottement dont le coefficient f est très petit?

4° Dans un plan vertical, un fil est enroulé sur une courbe à déterminer, le fil se détache tangentiellement de cette courbe, la portion rectiligne du fil portant, à son extrémité libre, un point pesant. On propose de déterminer la courbe sur laquelle est enroulée une partie de ce fil, de manière que le pendule ainsi réalisé, analogue au *pendule* cycloïdal bien connu, soit *un pendule à tension constante*. Quelle est la loi du mouvement de ce pendule?

Examiner tout particulièrement le cas où la tension constante serait égale au poids du pendule.

Nota. — Sur la nature du fil, on fera toutes les

hypothèses habituelles; on devra, dans l'exposition du problème du *pendule à tension constante*, ne pas perdre de vue le lieu qui le rattache intimement au problème du mouvement d'un point pesant sur une *courbe à pression constante*.

5° Sur une surface matérielle donnée, déterminer les courbes le long desquelles un point pesant en mouvement éprouve, de la part de la surface, une réaction constante. Une surface particulière peut-elle être une surface d'égale pression, c'est-à-dire une surface telle que, dans tout mouvement d'un point pesant uniquement assujetti à la condition de rester sur cette surface, la pression soit constante.

6° Comment déterminerait-on les courbes gauches à pression constante, dans le mouvement d'un point pesant? Déterminer notamment toutes les courbes gauches pour lesquelles la pression et sa composante verticale sont simultanément constantes.

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Au sujet de la question* 1617. — Le rapprochement indiqué page 247 est parfaitement justifié. Le théorème III donné à l'endroit cité (*Nouvelles Annales*, 1892, p. 329) est bien, en effet, l'énoncé *rectifié* de la question 1617. Une note au bas de la page 328 signale quelle a été la source de cet énoncé entaché d'erreur.

Par la même occasion, je signalerai une solution beaucoup plus simple du problème qui termine la note en question et qui consiste à *construire une parabole dont on connaît un point* A *ainsi que le diamètre* AD *et le centre de courbure* Ω *en ce point*. Abaissant de Ω sur AD la perpendiculaire ΩD, et de D sur la normale AΩ la perpendiculaire DN, menons par le point N la parabole NT à AD, qui coupe en T la tangente en A (perpendiculaire à AΩ). Si H est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur NT, le milieu S de T est le sommet et le milieu F de TN le foyer de la parabole.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1307.

(1878, p. 563.)

On donne la distance des centres et les rayons de deux circonférences (C) *et* (C′) *intérieures l'une à l'autre; une droite* AB, *de longueur constante, se déplace de manière que ses extrémités* A *et* B *restent respectivement sur* (C) *et sur* (C′) : *on demande l'expression de la surface comprise entre une position initiale et une position finale de la droite* AB *et les deux circonférences. En déduire la position initiale de la droite* AB *pour que l'aire correspondant à un déplacement de* 120° *sur la circonférence intérieure soit maximum.* L. VANDENPEEREBOOM.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Ce problème attend sa solution depuis près de quarante ans, et je doute fort qu'il en obtienne jamais une. Il suffit, en effet, de réfléchir à l'entière indépendance des données R, R′, $CC' = d$ et $AB = a$, pour juger de l'extraordinaire complication de la recherche ici proposée.

La condition que (C) et (C′) soient intérieures l'une à l'autre est une pure illusion, car le problème existe aussi bien pour des circonférences (C) et (C′) extérieures l'une à l'autre. On conçoit très bien la définition d'une aire limitée à deux arcs de ces cercles et à deux positions de la droite AB.

Le problème ne diffère pas de celui de la bielle appuyée à deux cercles, et transmettant le mouvement de l'un à l'autre par deux manivelles CA et C′B de longueurs R et R′, mais la complication de l'étude résulte du fait que, pour une position donnée de AB, il y en a d'autres AB′, BA′ et leurs symétriques par rapport à CC′, qui conviennent aussi bien au point de vue géométrique.

Le lieu d'un point M de la bielle AB est, comme on le sait, une courbe de Watt, du sixième degré, décomposable, il est vrai, en certaine hypothèse particulière. Quant à l'enveloppe de cette droite, elle est à peu près inabordable et je ne crois pas qu'il soit possible de l'amener au moindre résultat pratique.

1676.

(1894, p. 4*.)

Trouver, sur une conique, le point le plus éloigné et le point le plus rapproché d'un point donné situé hors de son plan. A. Cazamian.

Solution

Par M. H. Brocard.

Soient (C) une conique, M un point de l'espace, P sa projection sur le plan de la conique.

Le maximum et le minimum cherchés correspondent à ceux de la génératrice du cône de sommet M et de base (C).

Soient MD une génératrice et DT la tangente en D à la conique.

Pour que MD soit un maximum, il faut que MD soit perpendiculaire à DT. Mais alors PD, à son tour, est aussi perpendiculaire à DT.

Le point D sera donc le pied de la plus grande normale issue de P à la conique (C).

Conclusion analogue pour la normale minima PD'.

Soient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'équation de la conique (C) supposée une ellipse, et (α, β) les coordonnées du point P.

Les pieds des normales issues de P seront situés aux rencontres de l'ellipse avec l'hyperbole équilatère

$$(a^2 - b^2)xy = a^2 \alpha y - b^2 \beta x$$

ou hyperbole d'Apollonius, qui passe par le centre de l'ellipse et par le point P, et a ses asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse.

L'hyperbole rencontre toujours l'ellipse au moins en deux points D et D', de sorte que le problème proposé sera tou-

jours possible, quels que soient le point M de l'espace et sa projection P sur le plan de la conique.

1704.

(1895, p. 39*.)

1° *Dans tout triangle, on a*

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}.$$

Quand l'égalité a lieu le triangle est équilatéral.

2° *Trois nombres positifs quelconques a, b, c étant donnés, on a*

$$(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)-abc\leq 0.$$

Quand l'égalité a lieu, on a

$$a=b=c.$$

WEILL.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

1° a, b, c désignant les côtés d'un triangle, R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, S la surface, et $2p$ le périmètre $(a+b+c)$, on a, par des formules connues,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\qquad\ldots,$$

$$abc=4RS,$$

et l'inégalité à démontrer devient alors

$$8(p-a)(p-b)(p-c)<abc$$

ou

$$8S^2<4pRS$$

ou

$$2S<pR$$

ou

$$2r<R.$$

Autrement dit, dans tout triangle scalène, le diamètre du cercle inscrit est inférieur au rayon du cercle circonscrit, ce

qui résulte, en effet, de la définition du cercle d'Euler, ou cercle des neuf points, dont le rayon est moitié de celui du cercle circonscrit. Mais, d'après le théorème de Feuerbach, ce cercle touche et enveloppe le cercle inscrit. Ainsi donc

$$2r < R,$$

et l'égalité $2r = R$ n'a lieu que si $a = b = c$, c'est-à-dire pour le triangle équilatéral.

2° Les nombres a, b, c étant maintenant quelconques, mais positifs, soit $b - c = a = a'$, ...

L'inégalité à démontrer se réduira à

$$a'b'c' - abc < 0.$$

Elle aura lieu notamment : 1° pour $a > b + c$; 2° pour $a = b + c$; 3° pour $a < b - c$; 4° pour $a = b - c$; etc., comme on le vérifiera directement, ainsi que dans les *Questions d'Algèbre* de M. Desboves.

Note. — On pourra s'étonner qu'il ait fallu attendre vingt ans pour obtenir une réponse à la question 1704, mais la raison en est simple, c'est que, par une déplorable inattention, l'énoncé 1704 comprenait trois parties, celles désignées ci-dessus 1° et 2° et une troisième non séparée de la deuxième, et, pourtant d'un objet complètement étranger, qu'il sera sans doute expédient de rééditer, cette fois, sous un numéro spécial, tel que 1704 *bis* (1). Cette fâcheuse confusion s'est présentée ailleurs dans ce journal et dans d'autres recueils analogues, et a, pareillement, retardé la solution des questions ainsi enchevêtrées.

1733

(1866, p. 314.)

Étant donné un cercle dont le diamètre AC *est vertical, deux points pesants partent du repos en* A *et en* B, *et décrivent les deux cordes complémentaires* AB, BC; *les deux mobiles seront sur une même verticale au bout d'un temps indépendant de la position* B *sur la circonférence.*

B. Niewenglowski.

---

(1) *Voir* pp. 44, 49, 288.

Solution
Par M. H. Brocard.

En vertu du théorème classique du tautochronisme des cordes d'un cercle vertical, issues du point le plus haut ou aboutissant au point le plus bas, le mobile A parviendra en B dans le même temps que le mobile B parviendra en C.

Décrivons un cercle sur OB comme diamètre. Il rencontrera AB et BC en leurs milieux M et N. Mais, dans ce cercle OMBN, les cordes ON, BN sont parcourues dans le même temps, donc aussi les demi-cordes AM, BN du cercle primitif.

La droite MN est donc la verticale sur laquelle les deux mobiles A, B se retrouveront simultanément, quelle que soit la situation du point B.

Le lecteur est prié de faire la figure.

Remarque. — On pourrait aussi écrire les équations des mouvements des deux points sur les deux plans inclinés

$$AM = \frac{1}{2} g t^2 \cos A, \qquad BN = \frac{1}{2} g t^2 \sin A,$$

d'où

$$\frac{AM}{BN} = \cot A = \frac{AB}{BC}.$$

Les deux points seront donc sur une même verticale, équidistante de AC et de la verticale de B, lorsque

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Cela se produira à l'instant exprimé par

$$t = \sqrt{\frac{AC}{g}}.$$

C.-A. L.

1799.

(1898, p. 244.)

Trouver toutes les courbes qui sont homothétiques à leurs développées. M. d'Ocagne.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Cette question a depuis longtemps et à diverses reprises sollicité l'attention des géomètres; aussi en a-t-il été donné des solutions tant pour l'homothétie que pour la similitude ou pour l'identité de certaines courbes avec leurs développées. Je ne vois rien à y ajouter; c'est pourquoi il suffira sans doute de renvoyer le lecteur aux recueils où se trouvent les éléments d'une étude complète. *Voir*, notamment, les réponses à deux questions analogues, 2545 et 3335, posées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1903, p. 195 et 220, et 1908, p. 117.

Les courbes ici visées sont des épicycloïdes et des hypocycloïdes.

La question a été traitée et généralisée par A. Puiseux et par M. Haton de la Goupillière.

Enfin, dans le présent Journal, G. Pirondini l'a aussi résolue au cours d'une *Note géométrique*, 1886, p. 460-480.

1827.

1899, p. 388.

Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés, on obtienne un faisceau en involution, se compose de quinze courbes du troisième ordre, qui passent toutes par les six points donnés. E. DEWULF.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Cette question a été déjà proposée sous le numéro **1347** (1880, p. 432) et résolue (1881, p. 428).

A ces deux endroits, l'énoncé **1347** a été inexactement imprimé avec le mot *cubiques* à la place du mot *courbes*.

Cette rectification n'a pas été faite, que je sache.

1856.

1900, p. 382.

Des poids 1, 1, 2, 3, 5, ..., u_n, *mesurés par des nombres qui forment la suite de Fibonacci, sont respectivement*

appliqués sur des points d'une droite qui a pour abscisses 1, 2, 3, ... *n. On demande de déterminer la position du barycentre de ce système.* C.-A. LAISANT.

SOLUTION

Par M. C.-A. LAISANT.

Cette question, vieille de bientôt quinze ans, est jusqu'ici restée sans réponse. A la demande d'un de nos plus fidèles correspondants, j'en donne une ci-dessous, en rappelant que la série récurrente de Fibonacci est une mine, pour ainsi dire inépuisable, d'exercices intéressants d'Algèbre et d'Arithmétique, et qu'elle mériterait sans doute d'être moins délaissée des étudiants en Mathématique qu'elle ne semble l'être aujourd'hui.

La solution est d'ailleurs simple. Il s'agit de déterminer uniquement l'abscisse du barycentre G sur la droite OX par la formule

$$OG = x = \frac{\sum_1^n n\,u_n}{\sum_1^n u_n}.$$

Or, en écrivant

$$1 = 2 - 1, \qquad 1 = 3 - 2, \qquad \ldots, \qquad u_n = u_{n+2} - u_{n+1},$$

et ajoutant ces égalités, on a immédiatement

$$\sum_1^n u_n = u_{n+2} - 1,$$

résultat bien connu, et pour ainsi dire classique.

Appelant, en général, S_n cette somme $1 + 1 + \ldots + u_n$, nous avons

$$\begin{aligned}
1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n &= S_n,\\
1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n &= S_n - S_1,\\
2 + \ldots\ldots\ldots + u_n &= S_n - S_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
u_{n-1} + u_n &= S_n - S_{n-2},\\
u_n &= S_n - S_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ajoutant, et remplaçant les S_i par $u_{i+2} - 1$, on obtient

$$\sum_{1}^{n} n\, u_n = n\, u_{n+2} - u_{n+3} + 2,$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{n\, u_{n+2} - u_{n+3} - 2}{u_{n+2} - 1} = n - 1 - \frac{u_{n+1} - (n+1)}{u_{n+2} - 1}.$$

Si $OA_p = p$, on a

$$A_{n-2}G = x - (n-2) = \frac{u_n + n}{u_{n+2} - 1}.$$

Pour $n = 4$, cette valeur est 1. Pour $n > 4$, elle est toujours inférieure à l'unité, c'est-à-dire que l'abscisse du barycentre est comprise entre $n - 2$ et $n - 1$.

2166.

(1910, p. 528.)

La polaire d'un point M *d'une ellipse par rapport à son cercle de Monge passe par le symétrique du centre de courbure en* M *par rapport à* M. E.-N. Barisien.

Note

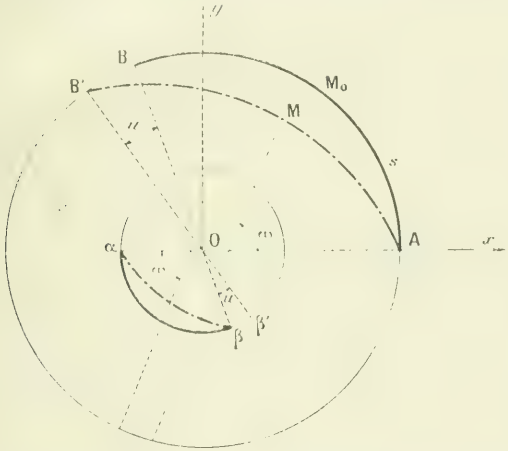
Par La Rédaction.

Un article (Correspondance, 1911, p. 222) rappelle que ce théorème a été publié par Steiner (*Journal de Crelle*, t. 30, 1845, p. 271-272).

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Besançon.

Épreuve théorique. — Première question. — *Un ressort* circulaire (AB *au repos*) *s'encastre sur l'appui fixe* A *et sur un solide tournant autour d'un axe* O *coïncidant avec l'axe du cercle qui prolonge le ressort en sa situation*



de repos. Le solide ayant tourné d'un angle u, *les coordonnées* x *et* y *d'un point* M *de la fibre moyenne où la normale fait l'angle* ω *avec l'axe* Ox *qui passe par l'appui fixe* A *et l'arc* s *qui correspond à ce point sont données par les formules de Résal qu'on rappelle ici :*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} s &= \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{\omega}\frac{dz}{\sqrt{1+a\cos z+b\sin z}};\\ x-R_0 &= -\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{\omega}\frac{\sin z\,dz}{\sqrt{1+a\cos z+b\sin z}};\\ y &= \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{\omega}\frac{\cos z\,dz}{\sqrt{1+a\cos z+b\sin z}}.\end{aligned}\right.$$

De plus, les composantes X *et* Y *de la réaction de l'appui* A *qui complète le couple d'encastrement sont données par les formules*

$$(2) \qquad X = -bc\frac{EI}{2}; \qquad Y = ac\frac{EI}{2}$$

(E *et* I *ayant leurs significations habituelles*).

Les trois constantes d'intégration a, b, c *se déterminent en appliquant les formules* (1) *à la nouvelle position* B′ *du point d'encastrement du ressort au solide tournant, c'est-à-dire en remplaçant pour ce point particulier* ω *par*

$$\omega_0 = p + u;$$

p = *étendue angulaire du ressort au repos,*
$L = R_0 p$ = *longueur du ressort remplace* s,
$R_0 \cos\omega_0$ *et* $R_0 \sin\omega_0$ *remplacent respectivement* x *et* y *dans les formules* (1).

Ce sont les trois équations (1) *transformées ainsi qui déterminent implicitement* a, b, c.

Cette méthode de Résal étant rappelée, on applique au solide tournant un second ressort circulaire $\alpha\beta$ *de même étendue angulaire* p *et de même sens d'enroulement, mais de manière que le point fixe d'attache* α *soit situé sur le diamètre* OA, *mais de l'autre côté du point* O *qui reste toujours le pied de l'axe du solide tournant et le centre commun des deux ressorts à l'état naturel, c'est-à-dire quand l'angle* u *est nul.*

On fera voir que si les ressorts circulaires sont choisis de manière à vérifier la relation

$$(3) \qquad \frac{EI}{L^2} = \frac{E'I'}{L'^2};$$

les constantes a *et* b *seront les mêmes sur chaque ressort, pour une même valeur de l'angle* u; *l'angle* ω *désignera la même variable dans la déformation simultanée des deux ressorts et enfin on déduira aussitôt des formules* (2) *que le solide tournant reçoit par les points d'encastrement* B′ *et* β' *un ensemble d'actions qui se réduisent à un couple,* rigoureusement.

Deuxième question. — *Interpréter l'expérience de William Thomson sur l'écoulement* lent *des gaz en régime permanent. La variation de température d'amont en aval gardant un signe constant quel que soit le signe de l'écart présenté par le gaz à la loi de Mariotte, on précisera avec soin la conclusion qui se dégage de ces expériences relativement à la loi de Joule dans les gaz réels.*

Épreuve pratique. — *On se propose d'entretenir un mouvement pendulaire qui est troublé par un frottement constant.*

On dispose à cet effet d'un choc réparateur regardé comme instantané et qui frappera le mobile au moment précis où celui-ci traverse sa position d'équilibre au point mort.

Le choc ayant pour effet d'augmenter la puissance $m^{\text{ième}}$ *de la vitesse d'une quantité constante, on demande de former la condition pour que le mouvement pendulaire ainsi entretenu tende de lui-même asymptotiquement vers un régime périodique.*

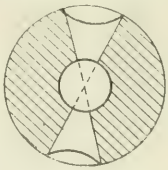
On envisagera le cas où le choc réparateur se produit une seule fois par vibration double, *et l'on exprimera la condition d'existence d'un régime périodique limite pour lequel* u_0 *serait la valeur absolue de la semi-amplitude* initiale *de l'oscillation simple au cours de laquelle le choc réparateur va agir.*

On désignera par f *le rapport de l'accélération négative de la résistance constante de frottement à l'accélération de la force pendulaire estimée à distance* 1.

Pour assurer une périodicité limite, on cherchera une condition d'inégalité entre les trois quantités m, u_0 *et* f; *et l'on empruntera cette condition au théorème de M. Kœnigs sur les substitutions répétées; f étant notablement plus petit que* ω_0, *on montrera que la condition trouvée, toujours satisfaite pour* $m \geqq 2$, *n'est jamais satisfaite pour* $m \leqq 1$ *et l'on étudiera le cas intermédiaire, c'est-à-dire le cas où* $1 < m < 2$. (Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — Première question. 1° *Établir que, sous l'action de forces déformantes, volumétriques et superficielles* données, *la déformation d'un solide élas-*

tique est unique *et que, de plus, le solide déformé* comporte un régime intérieur de pression.



2° *Quelle est la déformation élastique d'un solide homogène isotrope simplement soumis à une même pression normale* constante *sur chacun des éléments situés sur l'une quelconque de ses surfaces frontières?*

Deuxième question. — *On considère la portion d'un solide élastique homogène et isotrope comprise entre deux sphères concentriques, et hors d'un cône de révolution dont le sommet est situé au centre commun des deux surfaces sphériques. On envisage dans cette portion du solide une déformation élastique dont les composantes* ξ, η, ζ *seraient ainsi définies, dans un système d'axes de coordonnées cartésiennes ayant respectivement pour origine et pour axe des* z *le sommet et l'axe du cône de révolution :*

$$\xi = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\eta = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\zeta = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{\rho} + \beta \operatorname{Log} \frac{1 + \frac{z}{\rho}}{1 - \frac{z}{\rho}} + \frac{\alpha}{\rho} \operatorname{Log} \frac{1 + \frac{z}{\rho}}{1 - \frac{z}{\rho}},$$

σ, α, β, γ, *étant quatre constantes;*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Quelles sont les forces volumétriques capables de produire ce régime?

Épreuve pratique. — *Un ressort spiral hélicoïdal d'acier, à spires peu inclinées, a* 10 *tours; son rayon est de* 6^{mm}, *sa section est rectangulaire et le rapport de la dimension radiale de cette section à la dimension h parallèle aux générations du cylindre est égal à* $\frac{1}{7}$. *La dimension h étant de* $0^{mm},5$ *et le spiral étant attelé sur un balancier, ce système peut être équilibré par un couple agissant sur ce balancier dont le bras de levier est supposé de* 12^{mm}.

Calculer quelle sera la valeur commune des forces de ce couple quand le balancier se sera déplacé de 90° *par rapport à la position d'équilibre qu'il occuperait lorsque le spiral seul est attelé au balancier.*

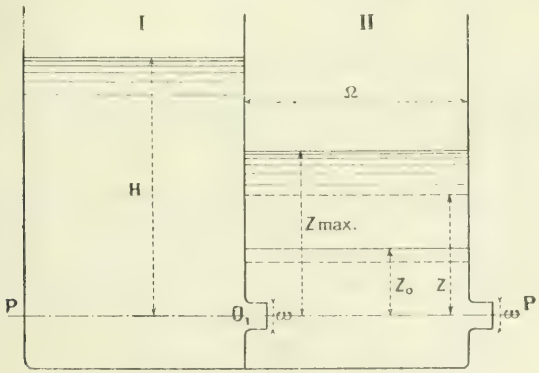
Coefficient d'élasticité de l'acier dans le système

$$C.G.S. = 22000 \times 10^8.$$

(Juin 1914.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — 1° Problème. — *On donne deux réservoirs I et II. Le réservoir I est alimenté de telle*



façon que la surface libre de l'eau qu'il contient soit maintenue à un niveau constant.

Dans un plan horizontal P *situé à une distance* H *au-dessous de cette surface libre, se trouvent les centres de gravité de deux orifices* O_1 *et* O_2 *de section com-*

mune ω : *le premier fait communiquer les réservoirs I et II et le second est percé dans la paroi externe du réservoir II; ces deux orifices sont disposés de façon à mouler la veine.*

Les sections des réservoirs, et en particulier la section Ω *du réservoir II, sont insuffisamment grandes, relativement à la section commune* ω *des orifices* O_1 *et* O_2, *pour qu'on puisse négliger les vitesses de l'eau dans ces réservoirs. A l'instant initial, la surface libre dans le réservoir II est à une distance* 20 *au-dessus du plan* P.

Dans ces conditions, on demande :

1° *A quelle hauteur maxima* z_{max}, *au-dessus du plan* P, *s'élèvera l'eau dans le réservoir II;*

2° *En désignant par* z *la cote, au-dessus du plan* P, *de la surface libre dans le réservoir II, au temps* t, *de déterminer la loi* $z = f(t)$ *qui lie* z *à* t; *calculer en particulier le temps* T_{max} *compris entre l'instant initial et l'instant où la surface libre dans le réservoir II atteint la cote maxima* z_{max};

3° *D'appliquer les formules trouvées aux données suivantes :*

$$H = 1^m, \qquad \Omega = 10^{m^2},$$
$$z_0 = 0^m,10, \qquad \omega = 0^{m^2},01,$$

et de tracer la courbe $z = f(t)$ *dans ce cas déterminé.*

2° Question de cours. — *Turbines à réaction et sans réaction; classification des turbines.*

Épreuve pratique. — 1° *Mesure de débit au déversoir Bazin;*

2° *Nomenclature des pièces principales d'une machine à vapeur de* 120 *chevaux (type Satre).* (Juillet 1912.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Comparer entre eux les moteurs à explosions à un, deux et quatre cylindres, au double point de vue de la régularisation cyclique du couple moteur et de l'équilibrage dynamique des masses à mouvement alternatif.*

On rappelle la formule

$$\gamma_A = \omega^2 r\left(\cos\varphi + \frac{1}{m}\cos 2\varphi + \frac{1}{4m^3}(-\cos 4\varphi + \cos 2\varphi) + \ldots\right).$$

II. *Exposer la méthode graphique pour l'étude du volant dans les cas suivants :*

1° *Machine à vapeur à un cylindre;*

2° *Moteur à gaz à un cylindre;*

3° *Moteur à plusieurs cylindres.*

Au début, on rappellera très brièvement, sans démonstration, *les principaux résultats mis en évidence dans la théorie du volant.*

Épreuve pratique. — *On considère une automobile construite de manière à faire* 60^{km} *à l'heure en quatrième vitesse, et* 30 *en seconde, quand le moteur tourne à sa vitesse normale de* 1000 *tours à la minute.*

I. *Déterminer la puissance du moteur pour que la voiture puisse faire effectivement* 60^{km} *à l'heure en palier, et calculer dans ce cas les réactions normales et tangentielles du sol, les tensions des chaînes, ainsi que les efforts de poussée exercés par les tendeurs de chaîne sur le châssis.*

II. *Déterminer la rampe limite sur laquelle la voiture peut se maintenir à* 30^{km} *à l'heure en deuxième vitesse, et calculer aussi dans ce cas les mêmes éléments que plus haut.*

Données :

Poids total, $P = 1500^{kg}$ *dont* 900^{kg} *sur l'arrière et* 600^{kg} *sur l'avant;*

Surface de front, $S = 2^{m^2}$;

Coefficient normal de traction, $f_1 = 0,025$;

Rendement du mécanisme, $\rho = 0,7$;

Rapport du rayon R′ *des roues dentées de chaînes au rayon* R *des roues,* $\frac{R'}{R} = \frac{1}{2}$;

Angle des bielles de poussée (tendeurs et chaînes) avec l'horizontale, $\varepsilon = 15°$;

Hauteur du centre de gravité G *de la voiture au-dessus du sol,* $h = 1^m$.

Nota. — *Les candidats au diplôme ne traiteront pas les questions relatives aux tendeurs de chaînes.*

(Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — I. *Équilibre dynamique d'une roue motrice.*

II. *Rôle du volant dans la régularisation cyclique de la vitesse d'une automobile (ne rien dire des autres rôles du volant).*

III. *Début de la théorie des turbines hydrauliques. On laissera de côté toutes les considérations préliminaires, et l'on établira seulement l'équation de fonctionnement :*

$$uv \cos\alpha = gH.$$

Épreuve pratique. — *Sur un châssis de petite voiture automobile se trouvent un moteur faisant 8 chevaux à 1500 tours et une boîte de vitesse disposée pour faire* 50^{km} *à l'heure en troisième vitesse,* 25^{km} *en deuxième et* $12^{km},5$ *en première. Le rayon moyen des cônes d'embrayage est* $r = 0^{m},15$; *leur demi-angle au sommet est* $i = 20^{\circ}$; *leur coefficient propre de frottement est* $f = 0,5$.

Déterminer :

1° *Le poids que doit avoir cette voiture pour qu'on puisse faire effectivement* 50^{km} *à l'heure en palier [coefficient de traction* $f_1 = 0,25$; *rendement du mécanisme* $\rho = 0,7$; *surface de front* $S = 1^{m^2}$];

2° *Les pentes maxima* α *et* β *qu'on pourra monter en deuxième et en première vitesse;*

3° *Les efforts de poussée* Q *et* Q' *que doit produire le ressort d'embrayage pour que l'accélération de démarrage en première vitesse soit respectivement de* 2^{m} *par seconde en palier et de* 1^{m} *à la montée à la pente* α.

(Juillet 1909.)

Épreuve théorique. — I. *Fonctionnement dynamique du régulateur. (Ne donner que l'étude graphique.)*

II. *Mode de fonctionnement de l'embrayage d'une*

automobile. (Établir seulement la relation qui existe entre la poussée exercée par le ressort et l'accélération prise par la voiture.)

Épreuve pratique. — *Étudier par le calcul et représenter graphiquement, en tenant compte des forces d'inertie, les variations de la réaction latérale* N *du piston d'un moteur à explosions pendant la période de détente.*

Données :

Alésage 100^{mm}; *course* 120^{mm};

Nombre de tours à la minute 1500;

Taux de la compression 4;

Rapport de bielle à manivelle 4;

Poids de la masse à mouvement alternatif 3^{kg};

Pression due à l'explosion 24^{kg} *par centimètre carré.*

On fera cette étude d'après le diagramme théorique défini par l'équation

$$p = p_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1,3},$$

en supposant que l'explosion est instantanée, et qu'elle a lieu sous le volume de la chambre de compression.

(Novembre 1909.)

Épreuve théorique. — *Étudier les modes d'action simultanés des ressorts d'arrière et des tendeurs de chaînes d'une automobile :*

1° *Pendant la marche normale à vitesse constante;*

2° *Pendant le démarrage;*

3° *Pendant le freinage sur la transmission.*

Épreuve pratique. — I. *Exposer brièvement la méthode de Reuleaux pour le tracé des profils conjugués des engrenages.*

II. *Appliquer cette méthode au cas des engrenages à épicycloïdes avec les données suivantes :*

Nombre de dents du pignon $n = 15$;

Nombre de dents de la roue $n' = 25$;

Rayon du pignon $R = 75^{mm}$;

Rayon du cercle auxiliaire $R_1 = 100^{mm}$;

Arc d'approche = arc de retraite = 1 pas.

(Juillet 1910.)

Epreuve théorique. — I. *Équilibrage des masses à mouvement circulaire.*

II. *Équilibrage approché des masses à mouvement alternatif dans le cas du moteur à un cylindre.*

Epreuve pratique. — Première Partie. — *On considère un tramway pesant 8 tonnes, qui remorque un wagon pesant 6 tonnes. L'effet normal de traction* $f_1 = 10^{kg}$ *par tonne pour l'automotrice et pour la remorque; on néglige la résistance de l'air. Le coefficient d'adhérence* $f = 0,5$. *Le diamètre des roues* $2R = 0,8$.

1° *Calculer le couple moteur effectif total (c'est-à-dire la somme des couples moteurs appliqués aux roues du tramway, supposées toutes motrices) à l'instant où l'on marche à vitesse constante, en montant une rampe de* 5^{mm} *par mètre;*

2° *Même question quand on démarre en palier, à accélération constante, de manière à atteindre la vitesse de* 12^{km} *à l'heure en 3 secondes;*

3° *Calculer l'espace parcouru pendant le freinage sur une pente de* 3^{mm} *par mètre, en supposant qu'on freine à un instant où l'on fait* 15^{km} *à l'heure, et qu'on utilise toute l'adhérence de l'automotrice;*

4° *Même question en supposant qu'on utilise aussi toute l'adhérence de la remorque.*

Deuxième Partie. — *Déterminer, en se servant de l'intégrateur d'Amsler, l'ellipse centrale d'inertie d'un profil de fer double* T *à ailes inégales, donné en vraie grandeur.*

(Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — I. *Étendre les principaux résultats de la théorie générale des turbines :*

1° *A la turbine Jonval à tube de succion;*

2° *A la turbine Girard à libre déviation.*

II. *Exposer la méthode de Reuleaux pour le tracé des profils conjugués des engrenages cylindriques extérieurs.*

L'appliquer au cas des engrenages à denture épicycloïdale.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Une automobile étant lancée à toute vitesse en palier et en ligne droite, on serre le frein de la transmission d'une manière bien continue. Au bout de quelques secondes, quand les oscillations du châssis ont cessé, un observateur constate par les méthodes de la chronophotographie qu'à un certain instant, la vitesse est de* 30^{km} *à l'heure et l'accélération de retard égale à* $\frac{g}{4}$. *Trouver à cet instant toutes les réactions normales du sol, toutes les réactions tangentielles, les efforts de freinage aux jantes des roues motrices, le couple résistant sur la partie du frein, la tension des brins inférieurs des chaînes et celle des bielles de poussée.* (*On supposera que l'état d'équilibre dynamique est atteint et l'on négligera les petites modifications de flèche des ressorts.*)

Données :

Poids total, $P = 1600^{kg}$ *dont* 950^{kg} *sur l'arrière et* 650^{kg} *sur l'avant, quand la voiture est immobile sur un sol horizontal;*

Surface de front, $S = 2^{m^2}$;

Coefficient normal de traction. $f_1 = 0,025$;

Rendement du mécanisme, $\rho = 0,75$;

Rayons des roues, $R = 0^{m}.45$;

Hauteur du centre de gravité total au-dessus du sol, $h = 1^{m},25$;

Hauteur du centre de poussée de l'air, $h' = 1^{m},75$;

Empattement, $l = 2^{m},65$;

Rapport, $\frac{R'}{R} = \frac{1}{2}$;

Obliquité des bielles de poussée, $\varepsilon = 15^{\circ}$;

Obliquité des brins inférieurs des chaînes, $\eta = 2\varepsilon$;

Coefficient de démultiplication de la poulie de frein aux roues, $m' = 3,2$.

II. *Méthode dynamique pour déterminer le module d'Young par la flexion uniforme d'une tige; établir l'équation fondamentale et indiquer le mode opératoire.*

Application numérique. — *La tige fléchie a* 30^{cm} *de lon-*

gueur et $0^{cm},12$ *de diamètre. Les balanciers, à section carrée de* $1^{cm},3$ *de côté, ont* 32^{cm} *de longueur; leur masse commune est de* 450^{g}. *La durée de* 50 *oscillations complètes est de* $74^{s},2$. *Calculer le module* E *de la matière supposée homogène qui forme la tige.* (Juillet 1911.)

Épreuve théorique. — I. *Dans la théorie du régulateur à action directe, on exposera les questions suivantes :*

Interprétation graphique des équations d'équilibre. Sensibilité;

Comparaison au point de vue de la sensibilité entre le régulateur de Watt et celui de Porter;

Inconvénients de l'isochronisme absolu.

II. *Théorie de l'embrayage à cônes de friction employé sur les voitures automobiles.*

Épreuve pratique. — I. *Description et mode de fonctionnement :* 1° *Du moulinet dynamométrique;*

2° *De la balance dynamométrique simple de Charles Renard.*

II. *Avant-projet d'une turbine axiale d'action à joint noyé.*

Données :

Débit, $Q = 3^{m^3},5$;

Hauteur de chute, $H = 2^{m},4$.

On prendra :

Hauteur effective, $H_1 = 0,81\,H$,

$$\alpha = \alpha_1 = 25^{\circ}, \qquad a = 0,3\,r, \qquad n = 40, \qquad e = 3^{mm}.$$

On laissera de côté la question des aubes.

On rappelle les deux formules suivantes :

$$\zeta = 1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin^2\frac{\alpha_1}{2}}{\cos^2\alpha},$$

$$\frac{a_1}{a}\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = 1.$$

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — Question de cours. — 1° *Rôle du volant dans le cas des moteurs d'automobiles;*

2° *Cycle de Joule; sa définition; calcul de son rendement. Ce cycle est celui de meilleur rendement entre deux pressions données.*

Problème. — *Un cube élastique isotrope subit une déformation infiniment petite dont les composantes du déplacement, suivant des axes coordonnés joignant les centres des faces opposées du cube, sont, au point* (x, y, z),

$$u = k(y - z)x, \qquad v = k(z - x)y, \qquad w = kz(x - y),$$

k désignant une constante de faible valeur. On demande de calculer :

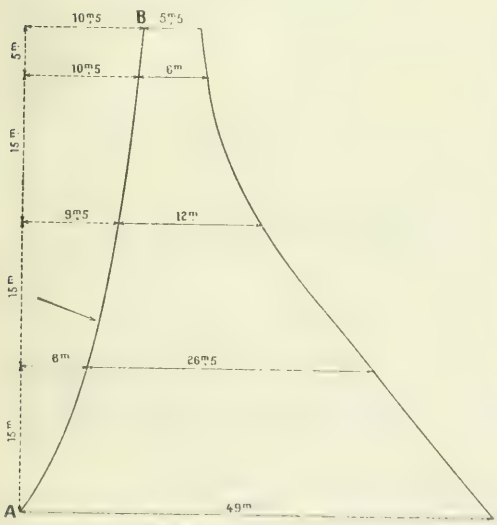
1° *La variation de volume du cube;*

2° *Le potentiel d'élasticité;*

3° *Les forces capables de produire cette déformation.*

Épreuve pratique. — I. *Déterminer la courbe de pression dans le barrage défini par le croquis ci-après (barrage du gouffre d'Enfer, réservoir du Furens), le poids de la maçonnerie étant de* 2250^{kg} *par mètre cube.*

Vérifier si les conditions de stabilité sont satisfaites.



Profil longitudinal

Profil transversal

II. *On quitte une route en ligne droite pour entrer, avec une vitesse de* 10^m *à la seconde, sur un cercle de* 50^m *de rayon. Le virage se fait pendant que la voiture avance de* 5 *fois l'empattement. On donne :*

Rayon des roues, $R = 0^m,45$;

Voie, $2e = 1,4$;

Empattement, $l = 2^m,6$;

Rapport entre le rayon des roues de chaînes et celui des pignons, $\mu = 4$;

Rapport entre les nombres de dents des engrenages coniques et des pignons satellites du différentiel, $\mu' = 2$; *et l'on demande de déterminer l'accélération angulaire moyenne des pignons satellites pendant le virage.*

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Établir la formule de Lamé relative à la résistance des enveloppes cylindriques épaisses.*

II. *Mode de fonctionnement des freins établis sur la transmission d'une automobile à chaînes. On établira l'équilibre dynamique des roues freinées et le mode d'action des ressorts de ces roues, et l'on montrera comment les chaînes et les bielles de poussée retiennent le châssis.*

Épreuve pratique. — I. *On considère une automobile construite de manière à faire* 60^{km} *à l'heure en quatrième vitesse et* 12^{km} *en première, quand le moteur tourne à sa vitesse normale de* 1200 *tours à la minute.*

1° *Déterminer la puissance du moteur pour que la voiture puisse faire effectivement* 60^{km} *à l'heure en palier.*

2° *Déterminer la rampe limite sur laquelle la voiture peut se maintenir à* 30^{km} *à l'heure, en quatrième vitesse, en supposant qu'à* 600 *tours le couple moteur soit majoré du* $\frac{1}{6}$ *de sa valeur normale.*

3° *Déterminer l'effort de poussée que doit produire le ressort d'embrayage pour que l'accélération de démarrage soit de* 2^m *par seconde en palier, en première vitesse.*

Données :

Poids total en ordre de marche, $P = 1800^{kg}$;

Surface de front, $S = 2^{m^2}$;

Coefficient normal de traction, $f_1 = 0,025$;

Rendement du mécanisme, $\rho = 0,75$;
Rayon moyen des cônes d'embrayage, $r = 0,18$;
Demi-angle au sommet de ces cônes, $i = 20^\circ$;
Coefficient moyen de frottement de ces cônes, $f = 0,5$.

II. *Déterminer le diamètre d'un arbre de transmission de* $2^m,50$ *de longueur entre milieux* A *et* B *des portées sur paliers.*

L'arbre reçoit son mouvement d'une poulie C *de* $0^m,45$ *de rayon et le transmet à deux poulies identiques* D *et* E *de* $0^m,225$ *de rayon; les centres des poulies sont définis par les relations* $AC = BD = DE = 0^m,50$.

Les brins de la courroie de C *sont inclinés à* 45° *sur la verticale; ceux des courroies de* D *et de* E *sont verticaux.*

L'arbre fait 90 *tours par minute, la puissance transmise* W = 10 HP *se répartit également entre* D *et* E,

$$W_D = W_E = 5 \text{ HP}.$$

Le coefficient de frottement des courroies sur les poulies est $f = 0,2$.

On prendra comme échelle des longueurs $\frac{4}{100}$.

(Novembre 1912.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

2251. Les coordonnées tétraédriques d'une droite MM′ étant les quantités

$$l = yz' - zy', \qquad m = zx' - xz', \qquad n = xy' - yz',$$
$$\lambda = xt' - tx', \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$

la quadrique qui a pour équation ponctuelle

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$$

a pour équation en coordonnées de droites tangentes

$$(l\sqrt{BC}+\lambda\sqrt{AD})^2+(m\sqrt{CA}+\mu\sqrt{BD})^2+\ldots=0,$$

ou encore

$$(l\sqrt{BC}-\lambda\sqrt{AD})^2+(m\sqrt{CA}-\mu\sqrt{BD})^2+\ldots=0,$$

avec

$$\sqrt{BC}\sqrt{AD}=\sqrt{CA}\sqrt{BD}=\sqrt{AB}\sqrt{CD}.$$

Les génératrices sont données par les relations

$$\begin{aligned} l\sqrt{BC}&=\varepsilon\lambda\sqrt{AD},\\ m\sqrt{CA}&=\varepsilon\mu\sqrt{BD}, \qquad l\lambda+m\mu+n\nu=0.\\ n\sqrt{AB}&=\varepsilon\nu\sqrt{CD}, \end{aligned}$$

G. Fontené.

2252. On considère un volume dans lequel l'aire de la section par un plan parallèle à un plan fixe P est une fonction du second degré de la cote du plan sécant. Ce volume est limité par deux bases parallèles au plan P, dont les aires sont B et B′; l'aire de la section parallèle aux bases et équidistante des bases est B″; les cotes des plans des bases et du plan de la section B″ sont a, b, c. La cote du centre de gravité du volume a alors pour expression

$$\frac{Ba+B'b+4B''c}{B+B'+4B''}.$$

Le volume peut être en particulier un prismatoïde.

G. Fontené.

ERRATA.

Pages 248 à 253. Dans tout cet article, *au lieu* de Ribeaucour, *lire* Ribaucour.

Page 279, troisième ligne, *au lieu de* $+a_1^2$, *lire* $-a_1^2$.

[P¹6f]

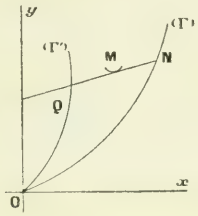
SUR LA TRANSFORMATION PAR AIRES CONSTANTES [1];

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

I. — SUR CERTAINES AIRES CONSTANTES.

1. *Théorème fondamental.* — Considérons (*fig.* 1) un système d'axes rectangulaires xOy et deux courbes

Fig. 1.



(Γ) et (Γ') d'équations $x = f(y)$ et $x = \varphi(y)$ passant par l'origine. Soient N un point variable de (Γ) et Q un point variable de (Γ') tels que l'aire du triangle

[1] *Extrait d'une lettre de l'auteur.* — La transformation géométrique que je désigne sous le nom de *Transformation par aires constantes* m'a conduit à des résultats généraux concernant une transformation simple, celle par hyperbolisme. J'ai pu ainsi obtenir, entre autres, une construction simple du centre de courbure des conchoïdes de Külp que j'ai signalées à l'attention des lecteurs (*Nouv. Ann.*, 1913) et dont MM. d'Ocagne, Bouvaist et Balitrand se sont ensuite occupés.

J'avais, d'ailleurs, préparé ce travail avant la publication de la Note de M. Balitrand, quand j'étais encore en Belgique. Ce sont les circonstances actuelles qui m'ont empêché, à mon grand regret, de vous le communiquer plus tôt.

mixtiligne ONQ soit constante et égale à a^2. Si l'on désigne par β et β' les ordonnées des points N et Q et par λ celle du point où NQ rencontre l'axe Oy, cette condition s'exprime par

$$\int_0^\beta f(y)\,dy - \frac{1}{2}(\beta-\lambda)f(\beta)$$
$$-\int_0^{\beta'} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2}(\beta'-\lambda)\psi(\beta') = a^2,$$

ou

$$(1)\quad 2\int_0^\beta f(y)\,dy - 2\int_0^{\beta'} \psi(y)\,dy - \beta f(\beta)$$
$$+\beta'\psi(\beta') + \lambda[f(\beta)-\psi(\beta')] = 2a^2.$$

L'équation de NQ étant

$$(2)\quad [f(\beta)-\psi(\beta')]y - (\beta-\beta')x = \beta' f(\beta) - \beta\psi(\beta'),$$

on a

$$\lambda = \frac{\beta' f(\beta) - \beta\psi(\beta')}{f(\beta)-\psi(\beta')};$$

la relation (1) s'écrit donc

$$(3)\quad 2\int_0^\beta f(y)\,dy - 2\int_0^{\beta'} \psi(y)\,dy$$
$$-(\beta-\beta')[f(\beta)+\psi(\beta')] = 2a^2.$$

Pour calculer l'abscisse du point où NQ touche son enveloppe dérivons (2) par rapport à β. En appelant $f'(\beta)$ et $\psi'(\beta')$ les dérivées

$$\frac{df(y)}{d\beta},\quad \frac{d\psi(y)}{d\beta'},$$

il vient

$$(4)\quad \left[f'(\beta) - \psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right]y - \left(1 - \frac{d\beta'}{d\beta}\right)x$$
$$= \frac{d\beta'}{d\beta}f(\beta) + \beta' f'(\beta) - \psi(\beta') - \beta\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}.$$

En résolvant le système formé par les équations (2) et (4) par rapport à x, on trouve pour l'abscisse ξ cherchée une fraction ayant pour numérateur

$$\begin{aligned} N \equiv{} & (\beta' - \beta)\psi(\beta')f'(\beta) - (\beta' - \beta)f(\beta)\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - \psi^2(\beta') \\ & - f^2(\beta)\frac{d\beta'}{d\beta} + f(\beta)\psi(\beta')\left(1 + \frac{d\beta'}{d\beta}\right) \end{aligned}$$

et pour dénominateur

$$\begin{aligned} D \equiv{} & \left[f'(\beta) - \psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right](\beta' - \beta) \\ & + \left(1 - \frac{d\beta'}{d\beta}\right)[f(\beta) - \psi(\beta')]. \end{aligned}$$

Or, si l'on dérive (3) par rapport à β, on trouve la relation

$$(5) \qquad \begin{aligned} & \left(1 + \frac{d\beta'}{d\beta}\right)[f(\beta) - \psi(\beta')] \\ & + (\beta' - \beta)\left[f'(\beta) - \psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right] = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} & (\beta' - \beta)\left[f'(\beta) - \psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} + 2\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right] \\ & \qquad + [f(\beta) - \psi(\beta')]\left(1 - \frac{d\beta'}{d\beta} + 2\frac{d\beta'}{d\beta}\right) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$D = 2\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}(\beta - \beta') - 2[f(\beta) - \psi(\beta')]\frac{d\beta'}{d\beta}.$$

Mais la relation (5) s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & \left[(\beta' - \beta)f'(\beta) + f(\beta)\left(1 + \frac{d\beta'}{d\beta}\right)\right]\psi(\beta) \\ & \quad = \psi^2(\beta') + \psi^2(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - (\beta' - \beta)\psi(\beta')\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}. \end{aligned}$$

Dès lors

$$N = \psi^2(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - (\beta'-\beta)\psi(\beta')\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}$$
$$-(\beta'-\beta)f(\beta)\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - f^2(\beta)\frac{d\beta'}{d\beta},$$

ou encore

$$N = \left\{(\beta-\beta')\psi'(\beta') - [f(\beta)-\psi(\beta')]\frac{d\beta'}{d\beta}\right\}[f(\beta)+\psi(\beta')].$$

Par suite

$$\xi = \frac{1}{2}\left[f(\beta)+\psi(\beta')\right].$$

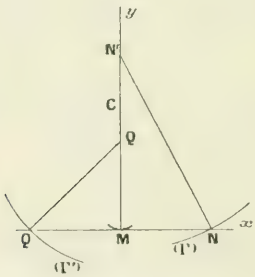
On en déduit le théorème suivant :

Lorsqu'une droite NQ *s'appuyant en* N *et* Q *sur deux courbes fixes forme avec ces courbes un triangle mixtiligne d'aire constante, cette droite touche son enveloppe au milieu du segment* NQ.

2. *Centre de courbure de l'enveloppe.* — Quelques considérations de Géométrie intrinsèque conduisent à la construction du centre de courbure de l'enveloppe au point M, milieu de NQ.

Prenons (*fig.* 2) comme système d'axes coordonnées

Fig. 2.



mobiles la tangente et la normale à l'enveloppe en M.

Si les coordonnées de N et de Q sont respectivement $(k, 0)$ et $(-k, 0)$ et si ρ désigne le rayon de courbure de l'enveloppe en M, les formules de Cesàro [1] donnent pour le point N

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dk}{ds} + 1, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{k}{\rho},$$

et, pour le point Q,

$$\frac{\delta x}{ds} = -\frac{dk}{ds} + 1, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{k}{\rho}.$$

Si donc on appelle θ_1 et θ_2 les angles de QN avec les normales à (Γ) et (Γ') en N et Q, on a

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{-\frac{dk}{ds} + 1}{\frac{k}{\rho}}, \qquad \operatorname{tang}\theta_2 = -\frac{\frac{dk}{ds} + 1}{\frac{k}{\rho}};$$

d'où

$$k \operatorname{tang}\theta_1 - k \operatorname{tang}\theta_2 = 2\rho.$$

On en déduit cette construction [2] :

La normale en M *à l'enveloppe rencontre en* N′ *et* Q′ *celles à* (Γ) *et* (Γ') *en* N *et* Q. *Le centre de courbure est le milieu de* Q′N′.

3. *Exemple.* — Un cas simple est celui où l'on considère les paraboles

$$y^2 = \pm 2px.$$

---

[1] Cesaro, *Natürliche Geometrie*, p. 21.

[2] Plus généralement on démontrerait de la même manière que si la tangente en un point M d'une courbe rencontre deux courbes (Γ) et (Γ') aux points N et Q tels que le rapport MN : MQ soit constant, le centre de courbure C de la première courbe en M divise dans le même rapport le segment déterminé sur MC par les normales en N et Q aux courbes (Γ) et (Γ').

Alors la condition (3) devient

$$(6)\qquad \frac{\beta^3}{3p}+\frac{\beta'^3}{3p}-\frac{1}{2p}(\beta-\beta')(\beta^2-\beta'^2)=2a^2.$$

D'autre part, si ξ et η désignent les coordonnées du milieu de NQ,

$$(7)\qquad \xi=\frac{\beta^2-\beta'^2}{2p},\qquad \eta=\frac{\beta+\beta'}{2}.$$

On en déduit successivement

$$\xi=\frac{(\beta+\beta')(\beta-\beta')}{4p}=\frac{\eta(\beta-\beta')}{2p},\qquad \beta-\beta'=\frac{2p\xi}{\eta},$$

$$(8)\qquad \beta\beta'=\frac{\eta^4-p^2\xi^2}{\eta^2}.$$

Or, la relation (6) s'écrit encore

$$2(\beta+\beta')(\beta^2-\beta\beta'+\beta'^2)-3(\beta-\beta')^2(\beta+\beta')=12a^2p,$$

ou

$$2\eta(\beta^2+\beta'^2-4\beta\beta')=-12a^2p,$$

ou enfin, en tenant compte de (7) et (8),

$$\eta^4-3p^2\xi^2=3pa^2\eta.$$

L'enveloppe de la droite NQ est donc la quartique

$$y^4-3p^2x^2=3pa^2y.$$

Dans le cas où a^2 est nul, l'origine fait partie de l'enveloppe, ce qui est évident.

L'enveloppe proprement dite se compose des deux paraboles

$$y^2=\pm px\sqrt{3}.$$

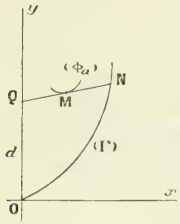
4. Le cas où (Γ') est l'axe Oy est particulièrement intéressant. La transformation qui sert à passer de (Γ) aux enveloppes correspondantes jouit de propriétés

remarquables qui font l'objet des développements qui vont suivre. Nous réserverons à ce cas important le nom de *Transformation par aires constantes d'une courbe.*

II. — La transformation par aires constantes.

5. Considérons (*fig.* 3) une courbe (Γ) et une droite d se rencontrant en un point O. Soient N un

Fig. 3.



point variable sur la courbe et Q un point variable de d tels que l'aire du triangle mixtiligne NOQ soit constante et égale à a^2. Désignons l'enveloppe de la droite NQ par (Φ_a).

Prenons la droite d pour axe des y, la perpendiculaire en O pour axe des x. Si (α, β) sont les coordonnées de N et si λ est l'ordonnée de Q, la condition d'aires s'exprime par la relation

$$\int_0^\beta x\,dy - \frac{1}{2}\alpha(\beta - \lambda) = a^2,$$

qui donne

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}\left(2a^2 + \alpha\beta - 2\int_0^\beta x\,dy\right).$$

Dès lors, l'équation de NQ s'écrit

$$x = \frac{\alpha}{2\int_0^\beta x\,dy - 2a^2}\left[\alpha y - \left(2a^2 + \alpha\beta - 2\int_0^\beta x\,dy\right)\right],$$

ou

$$(9) \qquad \alpha^2 y - 2\left(\int_0^\beta x\,dy - a^2\right)x = \alpha\left(2a^2 + \alpha\beta - 2\int_0^\beta x\,dy\right).$$

En dérivant par rapport à β, on obtient

$$(10) \qquad 2\alpha\frac{d\alpha}{d\beta}y - 2\alpha x = 2a^2\frac{d\alpha}{d\beta} - \alpha^2 + 2\alpha\beta\frac{d\alpha}{d\beta} - 2\frac{d\alpha}{d\beta}\int_0^\beta x\,dy.$$

La résolution du système formé par les équations (9) et (10) donne

$$(11) \qquad x = \frac{1}{2}\alpha,$$

résultat qui renferme le théorème du paragraphe 1, appliqué au cas qui nous occupe.

Désignons les coordonnées courantes pour l'enveloppe (Φ_a) par ξ et η. En portant la relation (11) dans l'équation (9), il vient successivement

$$4\xi^2\eta - 2\left(\int_0^\beta x\,dy - a^2\right)\xi = 4\xi\left(a^2 + \beta\xi - \int_0^\beta x\,dy\right),$$

$$2\xi\eta + \int_0^\beta x\,dy - 2\beta\xi = a^2.$$

D'où, en intégrant par parties,

$$\int_0^\alpha y\,dx = 2\xi\eta - a^2.$$

Si donc l'équation de (Γ) est

$$y = f(x),$$

celle de (Φ_a) sera

$$\int_0^{2\xi} f(2\xi)\, d(2\xi) = 2\xi\eta - a^2,$$

ou, en reprenant x et y comme coordonnées courantes,

$$\int_0^{2x} f(x)\, dx = 2xy - a^2. \tag{12}$$

En particulier, la courbe (Φ_0) a pour équation

$$\int_0^{2x} f(x)\, dx = 2xy. \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) ne changent pas quand on déplace l'axe des x parallèlement à lui-même. On pourra donc encore les employer dans le cas où d est une asymptote de (Γ), l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote étant finie.

De plus, on voit aisément que, si les axes font entre eux un angle θ, les équations subsistent si l'on désigne la constante par $a^2 \sin\theta$.

6. *Construction du centre de courbure de* (Φ_a). — Cette construction résulte immédiatement du théorème général du paragraphe 2 :

La normale à (Φ_a) *en* M *rencontre en* Q′ *et* N′ *la perpendiculaire en* Q *à* d *et la normale en* N *à* (Γ). *Le centre de courbure est le milieu de* Q′N′.

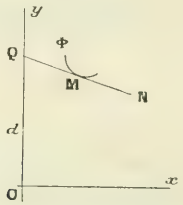
Un cas simple est celui où (Γ) est une droite. On sait qu'alors les transformées par aires constantes sont des hyperboles ayant (Γ) et d pour asymptotes. On a

donc cette construction du *centre de courbure* au point M d'une *hyperbole :*

La tangente en M *coupe les asymptotes en* N *et* Q ; *la normale en* M *rencontre les perpendiculaires élevées en* N *et* Q *sur les asymptotes aux points* N′ *et* Q′. *Le centre de courbure est le milieu de* N′Q′.

7. Inversement, soit $y = \varphi(x)$ l'équation d'une

Fig. 4.



courbe (Φ) (*fig.* 4). Celle de la tangente au point $M(\xi, \eta)$ sera

$$y - \varphi(\xi) = \varphi'(\xi)(x - \xi),$$

et le symétrique N du point Q où cette tangente coupe Oy, par rapport à M, a pour coordonnées

$$2\xi, \quad \varphi(\xi) + \xi\varphi'(\xi).$$

L'équation du lieu (Γ) de ce point s'écrit donc

$$y = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe (Γ) est donc affine à la courbe

$$(14) \qquad y = \frac{dx\,\varphi(x)}{dx},$$

l'axe d'affinité étant Oy et le rapport 2 : 1.

Il est aisé de voir au moyen de cette dernière équa-

tion que, quelle que soit la courbe (Φ), l'aire comprise entre NQ, l'axe Oy et la courbe (Γ) est constante.

En outre, la méthode du paragraphe précédent donne la construction de la tangente en N à (Γ) quand on connaît le centre de courbure de (Φ) en M.

8. La forme (14) de l'équation du lieu de N permet de distinguer dans quels cas l'aire constante est nulle ou non. Si l'on applique l'équation (12) à la courbe affine de (14), on trouve

$$2[x\varphi(x)]_{x=0} = a^2.$$

Si donc, pour $x = 0$, $\varphi(x)$ est fini, a^2 est nul et la courbe (Φ) est une courbe (Φ_0) pour (Γ).

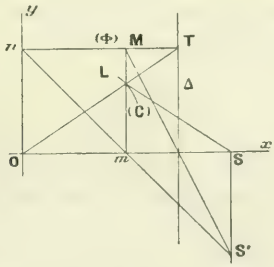
Si $\varphi(x)$ tend vers l'infini pour $x = 0$, $x\varphi(x)$ peut tendre vers une quantité finie; alors a^2 n'est pas nul et la courbe (Φ) est une courbe (Φ_a) pour (Γ).

Si $x\varphi(x)$ tend vers l'infini, l'aire du triangle mixtiligne considérée au paragraphe 5 est infinie et la recherche de l'enveloppe de NQ n'a pas de signification.

III. — Les hyperbolismes.

9. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe (C).

Fig. 5.



Considérons (*fig.* 5) une droite Δ parallèle à l'axe Oy,

d'équation $x = b$. Une droite variable $y = mx$ menée par l'origine rencontre (C) en un point L et Δ en un point T. Les parallèles menées aux axes Ox, Oy respectivement par T et L se coupent en un point M dont le lieu (Φ) est l'*hyperbolisme* de (C) [1].

Pour la facilité nous appellerons O et Δ le *pôle* et l'*axe* de la transformation et (C) l'*anti-hyperbolisme* de (Φ).

Les coordonnées du point T étant (b, mb) l'équation de (Φ) sera

$$f\left(x, \frac{xy}{b}\right) = 0. \tag{15}$$

Inversement si $y = \psi(x)$ est l'équation de (Φ) celle de (C) sera

$$y = \frac{x}{b}\,\psi(x). \tag{16}$$

Les équations qui précèdent, comme le raisonnement direct, montrent que les hyperbolismes d'une courbe (C) pour un même pôle et des axes parallèles sont des courbes affines, l'axe Ox étant l'axe d'affinité. En outre, si deux courbes sont affines, l'axe d'affinité étant Ox, leurs hyperbolismes pour des pôles et des axes identiques sont aussi affines [2].

10. Considérons maintenant trois axes rectangulaires $Oxyz$, le cylindre

$$f(x, z) = 0 \tag{17}$$

---

[1] G. Loria, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 20.

[2] Ainsi les *conchoïdes de Külp généralisées* que nous avons définies (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 196) comme hyperbolismes d'une ellipse quand le pôle est le centre et l'axe la tangente en l'un des sommets peuvent être considérées comme hyperbolismes d'un cercle quand le pôle est au centre et l'axe quelconque (*cf.* § 11).

et le paraboloïde hyperbolique équilatère

$$xy = bz. \tag{18}$$

L'élimination de z entre les équations (17) et (18) donne l'équation (15).

Par suite, *l'hyperbolisme* (Φ) *d'une courbe* (C) *est la projection sur le plan xy de la courbe d'intersection du paraboloïde hyperbolique équilatère* (18) *et du cylindre parallèle à l'axe y dont la section par le plan xz est une courbe égale à* (C).

On en déduit une construction de la tangente en M à l'hyperbolisme (Φ) quand on connaît celle en L à (C).

L'un des systèmes de génératrices de l'hyperboloïde (18) est formé par des droites qui s'appuient sur l'axe x et sont parallèles au plan yz, l'autre par des droites qui s'appuient sur l'axe y et sont parallèles au plan xz. Si donc on appelle m et n les projections de M sur Ox et Oy, la droite mn est la trace, dans le plan xy, du plan tangent au paraboloïde au point qui se projette en M sur xy.

Soient encore S le point où la tangente en L à (C) rencontre l'axe Ox, SS′ la parallèle menée par S à Oy, S′ le point où cette parallèle rencontre mn. La droite SS′ est la trace du plan tangent au cylindre (17) le long de la génératrice qui se projette sur xy suivant Mm. Le point S′ appartient donc à la tangente en M à l'hyperbolisme (Φ). On en déduit cette construction :

On projette M *en m et n sur* Ox *et* Oy; *la tangente à* (C) *en* L *coupe* Ox *en* S; *l'intersection de mn avec la parallèle menée par* S *à* Oy *est un point de la tangente en* M *à l'hyperbolisme* [1].

---

[1] Cette construction généralise celle que nous avons donnée pour la conchoïde de Külp (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 194).

11. *Hyperbolismes du cercle* (¹). — Si AA′ et BB′ sont deux diamètres rectangulaires d'un cercle de centre ω, l'hyperbolisme du cercle pour le pôle A et un axe parallèle à BB′ est une *cubique d'Agnesi* (²); pour le pôle B ou B′ et un axe parallèle à BB′, l'hyperbolisme est une *serpentine de Newton*. Quand le pôle est en ω et l'axe parallèle à BB′, il est aisé de voir que les hyperbolismes ne sont autres que les quartiques que nous avons désignées sous le nom de *conchoïdes de Külp généralisées* (³).

12. *Anti-hyperbolismes du cercle*. — Si la courbe (Φ) est le cercle

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

la courbe (C) est, d'après l'équation (16), la *lemniscate de Gerono* (⁴)

$$x^4 = b^2(x^2 - y^2).$$

On a donc cette description de la lemniscate de Gerono :

La lemniscate de Gerono est l'anti-hyperbolisme d'un cercle quand le pôle de la transformation est le centre et l'axe une tangente.

Considérons de même comme courbe (Φ) le cercle

$$y = \sqrt{x(b - x)},$$

dont Ox est un diamètre et qui touche Oy et Δ.

(¹) Les hyperbolismes du cercle sont des cubiques quand le pôle est sur la courbe, des quartiques dans le cas contraire.

(²) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 81.

(³) Voir *Nouvelles Annales*, 1913, p. 196.

(⁴) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 186.

D'après l'équation (16), son anti-hyperbolisme est

$$y = \frac{x}{b}\sqrt{b-x}, \tag{19}$$

ou

$$x^4 - bx^3 + b^2y^2 = 0. \tag{20}$$

Cette courbe est une *courbe piriforme*, d'après la dénomination de G. de Longchamps [1].

Nous allons montrer qu'on peut obtenir la *cissoïde* comme hyperbolisme de la courbe piriforme (20). Si l'on déplace l'origine au point $(b, 0)$ et si l'on renverse le sens de l'axe x, l'équation (19) devient

$$y = \frac{b-x}{x}\sqrt{x(b-x)}.$$

Si donc on prend l'hyperbolisme de cette courbe, le pôle étant la nouvelle origine et l'axe l'ancien axe des y, on obtient, d'après l'équation (15), la courbe

$$y = (b-x)\sqrt{\frac{b-x}{x}}.$$

C'est une cissoïde.

Ainsi, *le cercle et la cissoïde sont des hyperbolismes de la courbe piriforme* (20).

IV. — Rapport entre les deux transformations.

13. Reprenons la courbe (Γ) d'équation $y = f(x)$. La courbe affine, le rapport d'affinité étant 1 : 2 et l'axe d'affinité Oy, sera

$$y = f(2x).$$

Considérons maintenant les courbes intégrales de

---

[1] Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 205.

celle-ci [1], le pôle utilisé dans cette transformation étant le point O′ $(-b, 0)$. Elles ont pour équation

$$y = \frac{1}{b}\int_0^x f(2x)\,dx + q,$$

où q désigne la constante arbitraire. Cette équation s'écrit encore

$$y = \frac{1}{2b}\int_0^{2x} f(x)\,dx + q. \tag{21}$$

D'autre part, d'après l'équation (15), l'hyperbolisme de (21) est

$$\frac{xy}{b} = \frac{1}{2b}\int_0^{2x} f(x)\,dx + q$$

ou

$$\int_0^{2x} f(x)\,dx = 2xy - 2bq.$$

Nous retrouvons donc l'équation (12) des transformations par aires constantes (Φ_a) de la courbe (Γ).

Les transformées par aires constantes d'une courbe (Γ) *sont les hyperbolismes des courbes intégrales d'une courbe affine de* (Γ).

Il est utile d'observer que [1]

$$2bq = a^2.$$

Inversement, si l'on part d'une courbe (Φ) d'équation $y = \varphi(x)$, l'anti-hyperbolisme est, d'après l'équation (16),

$$y = \frac{x}{b}\varphi(x). \tag{22}$$

---

(1) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 332.
(2) *Voir* § 19.

La courbe différentielle de (22) est

$$y = \frac{dx\varphi(x)}{dx}$$

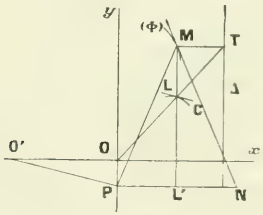
si l'on prend pour pôle de cette transformation le point $O'(-b, 0)$. On retrouve donc l'équation (14). Par conséquent :

La courbe (Γ) *est affine à la courbe différentielle de l'anti-hyperbolisme de* (Φ).

14. Les développements qui précèdent conduisent à une *nouvelle construction de la tangente à l'hyperbolisme d'une courbe* [1].

Appelons (*fig.* 6) P le point où la parallèle menée

Fig. 6.



par O' à la tangente en L à (C) rencontre Oy et L' le point correspondant à L sur la courbe différentielle. D'après ce qui précède, le symétrique N de P par rapport à L' décrit la courbe (Γ), et N appartient à la tangente en M à la courbe (Φ). On en déduit la construction suivante :

Par le point O' symétrique du pied de Δ par rapport à O on mène une parallèle à la tangente

---

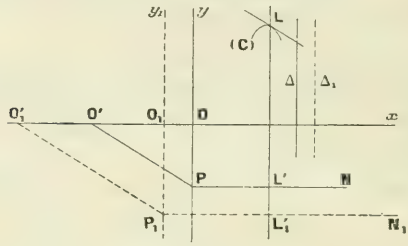
(1) Cette construction généralise celle que nous avons donnée pour la conchoïde de Külp (*Nouv. Ann.*, 1913, p. 195).

en L *à* (C) *qui coupe* Oy *en* P; *la symétrique de* MP *par rapport à* ML *est la tangente cherchée.*

15. Les considérations du paragraphe 13 donnent lieu à un théorème important qui simplifie souvent la recherche des courbes (Φ) quand on en connaît une [1].

Considérons (*fig.* 7) encore la courbe (C) et prenons,

Fig. 7.



pour la transformation par hyperbolisme un nouveau pôle O_1 de coordonnées $(-d, 0)$, ainsi qu'un nouvel axe Δ_1 parallèle à Δ. Soit O_1y_1 la parallèle menée par O_1 à Oy. Désignons par O'_1 le symétrique du pied de Δ_1 par rapport à O_1, par P_1 le point où la parallèle menée par ce point à la tangente en L à (C) rencontre O_1y_1, par L'_1 l'intersection des perpendiculaires menées par L et P_1 à Ox et Oy, et par N_1 le symétrique de P_1 par rapport à L'_1. Le point N_1 décrit la courbe (Γ_1) qui correspond au cas où l'on considère la courbe (Φ) et l'axe O_1y_1 pour droite d.

Soient μ, ν les coordonnées de N par rapport aux axes Oxy, μ_1, ν_1 celles de N_1 par rapport aux axes Oxy_1. Nous aurons, en désignant par b_1 la distance de O_1 à Δ_1,

$$\frac{\mu_1}{2} = \frac{\mu}{2} - d, \qquad \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{b_1}{b},$$

---

[1] *Cf.* § 20.

ou

$$\mu_1 = \mu - 2d, \qquad \nu_1 = \frac{b_1}{b}\nu.$$

On voit donc que les courbes (Γ) et (Γ_1) sont affines (non en position). De plus, si l'on fait subir à l'axe Ox une translation, la courbe différentielle subit la même translation.

En réunissant ces résultats on obtient le théorème suivant :

Les courbes (Γ) *correspondant à tous les hyperbolismes* (Φ) *d'une même courbe* (C), *les axes* Δ *étant parallèles et les pôles quelconques sont des courbes affines quand on prend, dans chaque cas, pour droite d la parallèle menée par le pôle à* Δ.

On peut encore énoncer ce théorème sous la forme suivante :

Toutes les transformées par aires constantes d'une même courbe correspondant à des droites d parallèles sont les hyperbolismes d'une même courbe.

16. *Centre de courbure de l'hyperbolisme.* — Les rapports entre les transformations par aires constantes et par hyperbolisme conduisent à la construction du centre de courbure C en un point M de l'hyperbolisme (Φ) de (C) quand on connaît le centre de courbure au point correspondant L de (C) (*fig.* 8).

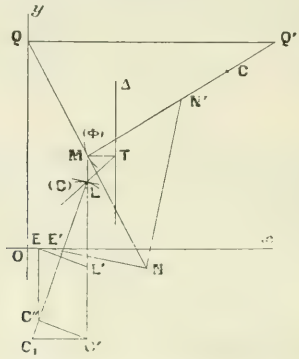
Soit C_1 le centre de courbure de la courbe (C) en L; au moyen du théorème de M. d'Ocagne [1] sur le centre de courbure des courbes intégrales on en déduit la tangente en L' à la courbe différentielle de (C). A cet

---

[1] Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 333.

effet, on projette C_1 en C' sur l'ordonnée de L, puis C' en C'' sur la normale LC_1 à (C), puis C'' en E sur Ox. Le point E est celui où la tangente considérée coupe Ox. En vertu d'une propriété des courbes affines, celle en N

Fig. 8.



à (Γ) rencontre le même axe en E′ symétrique de O par rapport à E. Dès lors, connaissant la tangente en N à (Γ), on obtient le centre de courbure C de la courbe (Φ) en M au moyen de la construction du paragraphe 6.

On a donc la construction suivante :

Soit N *le symétrique par rapport à* M *du point* Q *où la tangente en* M *à* (Φ) *coupe* Oy; *on projette* C_1 *en* C' *sur l'ordonnée de* L, *puis* C' *en* C'' *sur la normale à* (C) *en* L, *puis* C'' *en* E *sur* Ox; *si* E′ *est le symétrique de* O *par rapport à* E, *les perpendiculaires en* Q *et* N *respectivement sur* Oy *et* E′N *rencontrent la normale en* M *à* (Φ) *en* Q′ *et* N′; *le centre de courbure cherché est le milieu de* Q′N′.

17. On peut encore remarquer que si l'on considère une courbe (Φ) et la courbe (Γ) qui lui correspond, ainsi que l'anti-hyperbolisme (C) de (Φ), il existe une

courbe différentielle de (C) qui est homothétique à (Γ). Il suffit, en effet, de prendre la courbe différentielle en utilisant comme pôle le milieu de OO′.

V. — Applications.

18. *La Kohlenspitzkurve et les hyperbolismes du cercle.* — La courbe différentielle de l'ellipse

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$$

est la *Kohlenspitzkurve* (¹)

$$\frac{l^2}{x^2} - \frac{k^2 m^2}{l^2 y^2} = 1.$$

Donc, en utilisant un pôle convenablement choisi (²), on aura comme courbes intégrales de la Kohlenspitzkurve des cercles. Par suite, en vertu des théorèmes du paragraphe 13, on a la proposition suivante :

Les transformées par aires constantes de la Kohlenspitzkurve correspondant à des droites d parallèles aux asymptotes sont les hyperbolismes du cercle.

Si d est l'axe de symétrie parallèle aux asymptotes, parmi les transformées il y a *deux serpentines de Newton* et *une conchoïde de Külp généralisée.*

Si d est une asymptote parmi les transformées il y a une *cubique d'Agnesi.*

Inversement, on a les résultats suivants :

Le lieu du symétrique par rapport à un point M

(¹) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 336.

(²) *Voir* paragraphe suivant.

d'une conchoïde de Külp généralisée, ou d'une serpentine de Newton, ou d'une cubique d'Agnesi, du point où la tangente en M *coupe l'asymptote est une Kohlenspitzkurve.*

19. Au moyen de l'équation des transformées par aires constantes retrouvée au paragraphe 13, on détermine aisément la valeur de la constante a^2 dans chaque cas. Si l'on considère la Kohlenspitzkurve

$$\frac{c^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

la courbe affine, le rapport étant 1 : 2 et l'axe d'affinité Oy, sera la courbe

$$\frac{c^2}{4x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

dont les courbes intégrales obtenues au moyen du pôle $O'(-b, 0)$ sont les cercles de rayon $\frac{c}{2}$ ayant leurs centres sur Oy.

Alors, si $q = 0$ ou c, la courbe intégrale passe par l'origine et l'on obtient les serpentines de Newton. Si $q = \frac{1}{2}c$, on obtient la conchoïde de Külp généralisée.

Pour les serpentines de Newton on a $a^2 = 0$ ou $2bc$.

Pour la conchoïde de Külp généralisée $a^2 = bc$.

Quant à l'agnésienne, son équation étant de la forme

$$y = \varphi(x) = h\sqrt{\frac{l-x}{x}},$$

on a

$$x\varphi(x) = h\sqrt{x(l-x)},$$

et la discussion du paragraphe 8 montre qu'elle est une courbe (Φ_0) pour la Kohlenspitzkurve.

20. *La trisectrice de Maclaurin et la cissoïde.* — Considérons un cercle (Φ) et une droite d tangente en O à ce cercle. On en déduit une courbe (Γ) d'équation

$$\rho = \frac{a}{\cos\frac{\theta}{3}}$$

en coordonnées polaires. C'est une trisectrice de Maclaurin, ayant Ox pour axe de symétrie. En prenant l'axe Δ tangent à (Φ), l'anti-hyperbolisme de (Φ) pour le pôle O et l'axe Δ est la courbe piriforme (20). Comme, d'après le paragraphe 12, la cissoïde est l'hyperbolisme de la courbe (20) lorsqu'on prend pour pôle le pied de Δ et pour axe la droite d, on voit, d'après le paragraphe 15, que *la courbe* (Γ) *correspondant à une cissoïde quand la droite d est l'asymptote est une trisectrice de Maclaurin.*

Les équations

$$y = \sqrt{x(b-x)}, \qquad y = (b-x)\sqrt{\frac{b-x}{x}}$$

du cercle et de la cissoïde permettent de voir, au moyen de la discussion du paragraphe 8, que ces courbes sont des courbes (Φ_0) pour la trisectrice.

Parmi les transformées par aires constantes de la trisectrice de Maclaurin, correspondant à une aire nulle et des droites d parallèles à l'asymptote, il y a un cercle et une cissoïde.

Le cercle correspond au cas où d est la tangente au sommet de la boucle; la cissoïde s'obtient quand d est la parallèle à l'asymptote menée par le point situé au tiers de la distance du nœud au sommet de la boucle.

La méthode du paragraphe 6 donne une construction

de la tangente à la trisectrice de Maclaurin. Enfin on voit, en vertu du paragraphe 17, que *la trisectrice de Maclaurin est une courbe différentielle d'une courbe piriforme.*

21. *La trisécante de Delanges.* — Si l'on considère comme courbe (Φ) le cercle

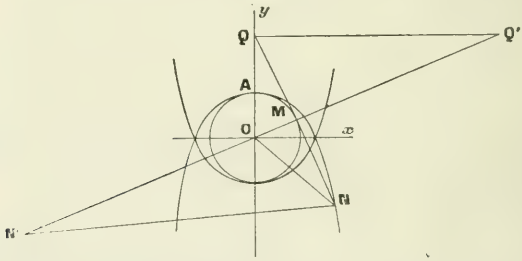
$$x^2+y^2=b^2, \tag{23}$$

on obtient, comme courbe (Γ), une courbe ayant pour équation en coordonnées polaires

$$\rho=\frac{b}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

C'est une trisécante de Delanges [1] dont les asymp-

Fig. 9.



totes sont parallèles à Oy (*fig.* 9). Il est aisé de voir que le cercle (23) est une courbe (Φ_0) pour la trisécante.

Appelons encore Q le point où la tangente au point M du cercle rencontre Oy et N le symétrique de Q par rapport à M. Si l'on désigne par A le sommet de la

---

[1] Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 231.

branche de la trisécante à laquelle appartient le point N, on a, d'après le paragraphe 6, la construction suivante de la normale à la trisécante au point N :

La perpendiculaire menée de N *à la bissectrice de l'angle* NOA *rencontre* OA *en* Q; *la perpendiculaire en* Q *sur* OA *rencontre cette bissectrice en* Q'. *Le symétrique de* Q' *par rapport à* O *est un point de la normale en* N *à la trisécante.*

Quant aux courbes transformées par aires constantes pour des droites parallèles aux asymptotes, elles sont les hyperbolismes de la lemniscate de Gerono.

Enfin, d'après le paragraphe 17, *la lemniscate de Gerono est une courbe intégrale de la trisécante de Delanges.*

22. *Paraboles d'indices quelconques.* — Prenons pour courbe (Γ) une parabole d'indice n entier ou fractionnaire, d'équation

$$x^n = p^{n-1} y. \tag{24}$$

D'après l'équation (13) sa courbe (Φ_0) est

$$\frac{1}{p^{n-1}} \int_0^{2x} x^n \, dx = 2xy,$$

ou

$$x^n = \frac{n+1}{2^n} p^{n-1} y.$$

La transformée par aires constantes d'une parabole (24) *d'indice n correspondant à une aire nulle et à l'axe* Oy *comme droite d est une parabole de même indice.*

Quant aux courbes (Φ_a) elles ont pour équation

$$2^{n+1} x^{n-1} = 2(n+1) p^{n-1} xy - (n+1) p^{n-1} a^2. \tag{25}$$

Si n est entier (Φ_a) est d'ordre $n+1$. Si n est de la forme $\frac{\gamma}{\delta}$, l'équation (25) devient, en élevant les deux membres à la puissance δ,

$$2^{\gamma+\delta}x^{\gamma+\delta} = (n+1)^{\delta}p^{\gamma-\delta}(2xy - a^2)^{\delta}.$$

Si $\delta > \gamma$, (Φ_a) est d'ordre 2δ.
Si $\delta < \gamma$, (Φ_a) est d'ordre $\gamma + \delta$.

D'ailleurs, une parabole d'indice $\frac{\gamma}{\delta}$ est d'indice $\frac{\delta}{\gamma}$ quand on intervertit les axes. Donc une parabole d'indice fractionnaire $\frac{\gamma}{\delta}$ donne lieu à des transformées (Φ_a) d'ordres $\gamma + \delta$ et 2δ quand on prend pour droites d les axes coordonnés.

Ce résultat est intéressant parce qu'il conduit à des courbes d'ordre impair élevé [1] quand γ et δ sont de parité différente.

Ainsi, les transformées (Φ_a) de la *parabole de Neil* [2], quand d est la normale au point de rebroussement, sont des *quintiques*.

Quand d est la tangente de rebroussement, ces transformées sont des *sextiques*.

Nous avons remarqué que les équations (12) et (13) sont applicables au cas d'axes coordonnés obliques. Or la *parabole de Schooten* [3] a pour équation

$$x^{\frac{4}{3}} = ay,$$

dans un système d'axes à 45°. Les transformées par

---

(1) En général, on rencontre rarement en Géométrie des courbes d'ordre impair supérieur au cinquième (*voir* Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 288 et 294).

(2) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 310.

(3) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 313.

aires constantes quand d est l'axe Oy sont donc des *courbes du septième ordre.*

23. Dans le cas de la *parabole du second degré*

$$x^2 = 2py$$

ayant pour axe la droite d, les transformées (Φ_a) sont les cubiques

$$(26) \qquad 4x^3 - 6pxy - 3a^2p = 0,$$

et la transformée (Φ_0) la parabole

$$x^2 = \frac{3}{2}py.$$

Il n'est pas sans intérêt d'observer que les podaires des cubiques (26) par rapport au sommet de la parabole sont des *courbes du septième ordre.*

En outre, si une corde NQ s'appuyant en N sur la parabole et en Q sur l'axe est telle que l'aire du triangle mixtiligne OQN reste constante, le lieu du centre du cercle touchant la parabole en N et passant par Q est aussi une *courbe du septième ordre.*

VI. — Sur quelques hyperbolismes.

24. *Hyperbolismes du cercle.* — Nous avons donné [1] la définition suivante de la cubique d'Agnesi qui est l'hyperbolisme d'un cercle lorsque le pôle est sur la courbe et que l'axe est perpendiculaire au rayon qui y passe :

La cubique d'Agnesi est le lieu du point d'intersection de la droite de Simson d'un point variable

---

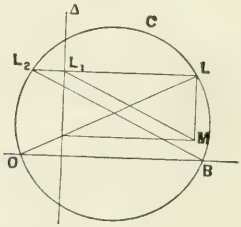
[1] *Mathesis*, 1912 (juillet-août).

d'un cercle par rapport à un triangle isoscèle inscrit avec la parallèle menée par ce point à la base.

On peut étendre ce théorème à tous les hyperbolismes du cercle correspondant à des pôles pris sur la courbe.

Considérons (*fig.* 10) dans le plan d'un cercle (C) une droite Δ et un point O pris sur la courbe. La perpendiculaire abaissée de O sur Δ recoupe (C) en B. Celle abaissée de L sur Δ rencontre Δ en L_1 et (C) en L_2. Les droites L_1M et BL_2 ont une direction symétrique de celle de OL par rapport à Δ; elles

Fig. 10.



sont donc parallèles. En vertu d'une propriété bien connue, ML est la droite de Simson de L par rapport au triangle inscrit dans (C), ayant B pour sommet et Δ pour base. D'où ce théorème :

Un hyperbolisme du cercle correspondant à un pôle situé sur la courbe est le lieu de l'intersection de la droite de Simson d'un point variable de ce cercle par rapport à un triangle inscrit avec la parallèle menée par ce point à l'un des côtés.

25. *Centre de courbure des conchoïdes de Külp généralisées.* — La construction de la tangente et celle du centre de courbure des hyperbolismes du

cercle se déduisent aisément des paragraphes 10, 14 et 16.

Dans le cas des conchoïdes de Külp généralisées cette dernière construction se simplifie. Pour ces courbes le point E n'est autre que le symétrique par rapport au pied de l'ordonnée de M, du point où la tangente en M à la conchoïde rencontre l'axe Ox (*fig.* 11). En effet, les équations paramétriques de la conchoïde sont

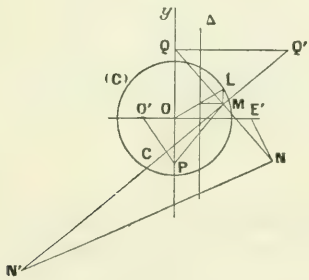
$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

L'équation de la droite MP est

$$ay\sin\varphi\cos\varphi - bx + ab\cos^3\varphi = 0;$$

elle coupe l'axe Ox en un point d'abscisse $a\cos^3\varphi$,

Fig. 11.



c'est-à-dire le point E. On a donc cette construction du centre de courbure de la conchoïde de Külp généralisée :

La tangente au point M *coupe l'asymptote en* Q *dont le symétrique par rapport à* M *est* N. *La symétrique de la tangente par rapport à l'ordonnée de* M *rencontre* Ox *en* E; *soit* E' *le symétrique de* O *par rapport à* E. *Les perpendiculaires en* Q *sur l'asymp-*

tote et en N *sur* E'N *coupent en* Q' *et* N' *la normale à la conchoïde en* M. *Le centre de courbure est le milieu de* Q'N' [1].

26. Les paragraphes 10, 14 et 17 donnent aussi la construction de la tangente et celle du centre de courbure à la lemniscate de Gerono et à la courbe piriforme (20). En outre, la transformation par hyperbolisme donne lieu à des relations entre plusieurs courbes remarquables.

L'hyperbolisme de la *Kohlenspitzkurve*

$$\frac{c^2}{y^2} - \frac{b^2}{x^2} = 1$$

est la *conchoïde de Külp généralisée*

$$x^2 y^2 = b^2 (c^2 - y^2).$$

La *cappa*

$$c^2 y^2 = x^2 (x^2 + y^2)$$

donne lieu à une *Kohlenspitzkurve*

$$\frac{c^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

ayant mêmes asymptotes.

Enfin, deux anti-hyperbolismes de la parabole sont des cubiques remarquables rencontrées par G. de

---

[1] On peut comparer à cette construction celle donnée, pour le cas particulier de la conchoïde de Külp ordinaire, par M. Balitrand (*Nouvelles Annales*, 1914, p. 354-359). Celle que nous indiquons est plus générale et plus directe. M. Balitrand donne (p. 356) une construction de la tangente à la Kohlenspitzkurve, lieu de N. On peut remarquer qu'une autre construction simple de cette tangente découle aussi des considérations qui précèdent. La symétrique de la tangente en M à la conchoïde, par rapport à l'ordonnée de M, coupe Ox en E; le symétrique de O par rapport à E est un point de la tangente considérée.

Longchamps dans son *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre* (¹).

Si l'on considère une parabole

$$y^2 = 2bx - b^2$$

qui a Oy pour directrice et Δ pour corde focale principale, ou celle,

$$y^2 = -2bx + b^2,$$

ayant Oy pour corde focale principale et Δ pour directrice, on obtient comme anti-hyperbolismes les cubiques

$$x^3 = \frac{b}{2}(x^2 \pm y^2).$$

Ce sont la duplicatrice cubique et la feuille parabolique droite.

Les anti-hyperbolismes d'une parabole obtenus en prenant pour pôle et axe le pied de la directrice et la corde focale principale ou le foyer et la directrice sont la duplicatrice cubique et la feuille parabolique droite.

VII. — Construction du centre de coubbure des courbes affines.

27. La méthode du paragraphe 6 donne la solution du problème général suivant :

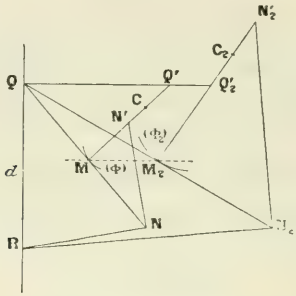
Étant donné le centre de courbure C *en un point* M *d'une courbe, trouver le centre de courbure* C_2 *au point correspondant* M_2 *d'une courbe affine.*

Prenons pour droite d l'axe d'affinité et considérons

(¹) Paris, 1890, pages 92-94 et pages 120-121.

la transformation inverse de celle par aires constantes (*fig.* 12). Dans cette transformation, les transformées

Fig. 12.



de courbes affines sont encore affines. Dès lors, appelons (Φ) la courbe donnée, (Φ_2) la courbe affine considérée, N et N_2 les symétriques par rapport à M et M_2 du point Q où les tangentes en M et M_2 aux courbes (Φ) et (Φ_2) se rencontrent sur d. Les tangentes en N et N_2 aux lieux (Γ) et (Γ_2) de ces points se rencontrent en un point R de d. D'après le paragraphe 6, ce point R s'obtient comme suit :

La perpendiculaire en Q *à* d *rencontre la normale en* M *à* (Φ) *en* Q'; *soit* N' *le symétrique de* Q' *par rapport à* C; *la perpendiculaire en* N *à* N'N *coupe* d *en* R.

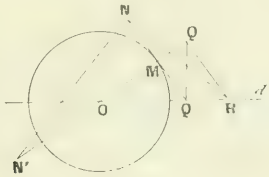
Ce point R sert ensuite à construire les centres de courbure aux point correspondants à M dans toutes les courbes affines. On obtient le centre de courbure C_2 de la courbe (Φ_2) de la manière suivante :

La normale en M_2 *à* (Φ_2) *rencontre en* N'_2 *et* Q'_2 *les perpendiculaires à* RN_2 *et à* d *en* Q; *le centre de courbure* C_2 *est le milieu de* $Q'_2N'_2$.

On peut donc en déduire que le *lieu des centres de courbure* aux points correspondants d'une famille de courbes affines est une *cubique*. Mais cette propriété résulte immédiatement de l'expression des coordonnées du centre de courbure en un point d'une courbe quelconque.

28. Quand la courbe (Φ) est un cercle, la droite d étant un diamètre, le point R jouit de la propriété suivante (*fig* 13) :

Fig. 13.



La tangente en M *au cercle rencontre* d *en* Q, *la perpendiculaire en* Q *sur* d *rencontre le rayon* OM *en* Q', *la perpendiculaire en* Q' *sur* OQ' *coupe* d *en* R.

Car, dans ce cas, les triangles N'ON et RQ'N sont semblables et l'on a

$$ON' : Q'R = ON : Q'N$$

ou

$$OQ' : Q'R = OQ : QQ'.$$

On en déduit cette *construction de la tangente à la trisécante de Delanges* [1], en supposant que N soit le sommet de la branche à laquelle appartient N :

La perpendiculaire menée de N *à la bissectrice*

[1] *Cf.* § 21.

de l'angle NOA *rencontre* OA *en* Q; *la perpendiculaire en ce point sur* OA *coupe la bissectrice en* Q'; *la perpendiculaire en* Q' *sur* OQ' *rencontre* OA *en* R; *la tangente cherchée est la droite* NR.

[K¹2d]

SUR UN THÉORÈME DE MŒBIUS;

PAR M. AURIC.

On sait d'après un théorème de Mœbius que, si un nombre quelconque de vecteurs planaires $V_1, V_2, V_3, \ldots$ liés à des points $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tournent d'un même angle (pris avec son sens) autour de ces points la résultante R de ces vecteurs passe par un point fixe P et tourne du même angle autour de ce point.

Appliquons ce théorème général au cas particulier d'un triangle de référence $A_1 A_2 A_3$.

Posons

$$\overline{A_2A_3} = a_1 e^{i\alpha_1}, \qquad \overline{V_1} = b_1 e^{i\beta_1},$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 = A_1, \qquad \beta_2 - \beta_3 = B_1.$$

On trouve aisément que les coordonnées barycentriques de P sont

$$p_1 = a_3 a_1 b_2 b_1 \sin(A_2 - B_3) + a_2 a_1 b_3 b_1 \sin(A_3 - B_2)$$
$$+ a_2 a_3 b_1^2 \sin A_1 - a_1^2 b_2 b_3 \sin B_1$$

et deux autres expressions analogues.

En particulier si les vecteurs sont parallèles

$$B_i = 0,$$

d'où

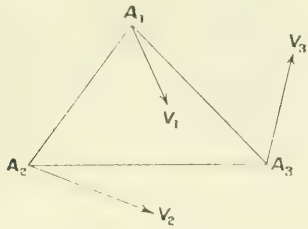
$$p_1 = b_1\left(a_3 a_1 b_2 \sin \widehat{A_2} + a_1 a_2 b_3 \sin \widehat{A_3} + a_2 a_3 b_1 \sin \widehat{A_1}\right).$$

et, comme l'expression entre parenthèses est symétrique, les coordonnées de P sont

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3,$$

ce qui constitue la définition même des coordonnées barycentriques.

Décomposons le vecteur V_1 suivant les côtés $A_1 A_2$



et $A_1 A_3$ du triangle et appelons V_{13}, V_{12} les composantes ainsi obtenues.

Considérons d'une part V_{13}, V_{21}, V_{32}, et d'autre part V_{12}, V_{23}, V_{31}.

On démontre aisément que chacun de ces groupes de trois vecteurs a une résultante qui passe par un point fixe P_1 ou P_2 dont les coordonnées sont

$$(P_1) \quad \frac{\sin\left(\widehat{A_3 - B_2}\right)}{a_3 b_2}, \quad \frac{\sin\left(\widehat{A_1 - B_3}\right)}{a_1 b_3}, \quad \frac{\sin\left(\widehat{A_2 - B_1}\right)}{a_2 b_1}.$$

$$(P_2) \quad \frac{\sin\left(\widehat{A_2 - B_3}\right)}{a_2 b_3}, \quad \frac{\sin\left(\widehat{A_3 - B_1}\right)}{a_3 b_1}, \quad \frac{\sin\left(\widehat{A_1 - B_2}\right)}{a_1 b_2}.$$

En particulier, lorsque les vecteurs sont parallèles

ces coordonnées deviennent

$$\frac{1}{b_2},\quad \frac{1}{b_3},\quad \frac{1}{b_1}\quad \text{et}\quad \frac{1}{b_3},\quad \frac{1}{b_1},\quad \frac{1}{b_2},$$

et les deux points P_1 et P_2 sont brocardiens.

Les deux résultantes partielles passant par P_1 et P_2 se coupent en un point M situé sur la résultante générale PM et le lieu de ce point M lorsque les vecteurs tournent autour de leurs points d'attache est une conique circonscrite à $P P_1 P_2$.

L'équation de cette conique est

$$\begin{aligned}&\Sigma m_1^2 a_2 a_3 b_2 b_3 \sin(A_1 + B_1)\\ &\quad - m_2 m_3 \left(a_2 a_3 b_1^2 \sin A_1 + b_2 b_3 a_1^2 \sin B_1\right) = 0.\end{aligned}$$

En particulier si les vecteurs sont parallèles cette conique devient

$$\Sigma a_2 a_3 \sin A_1 (b_2 b_3 m_1^2 - b_1^2 m_2 m_3) = 0,$$

et l'on reconnaît la brocardienne du point

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3.$$

On voit ainsi que cette conique peut être considérée comme dérivant directement du théorème de Mœbius et comme susceptible d'une généralisation immédiate dans le cas où les vecteurs donnés ne sont pas parallèles.

En particulier, si l'on a

$$A_i + B_i = 0,$$

le lieu de M est une conique circonscrite à $A_1 A_2 A_3$

$$\Sigma (a_2 a_3 b_1^2 - b_2 b_3 a_1^2) \sin A_1 m_2 m_3 = 0.$$

Les coordonnées des points fixes sont alors

$$p_1 = (a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3) \sin A_1 = \frac{K a_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2},$$

$$(P_1) \qquad \frac{a_1}{a_3 b_2}, \quad \frac{a_2}{a_1 b_3}, \quad \frac{a_3}{a_2 b_1},$$

$$(P_2) \qquad \frac{a_1}{a_2 b_3}, \quad \frac{a_2}{a_3 b_1}, \quad \frac{a_2}{a_1 b_2}.$$

Lorsque $\overline{V_1} + \overline{V_2} + \overline{V_3} = 0$ les points P, P_1, P_2 sont rejetés à l'infini.

Il est clair que les propositions précédentes peuvent être généralisées et appliquées à un nombre quelconque de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ parcourus dans l'ordre ci-dessus ou dans l'ordre inverse; il en résulte que quatre points, par exemple, définissent trois paires de points brocardiens et trois brocardiennes passant par le point fixe du système des quatre vecteurs.

[H2c]

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. F. BALITRAND.

L'équation différentielle des coniques homofocales

$$(1) \qquad xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

a été intégrée de bien des façons (*voir*, par exemple, *Nouvelles Annales*, 1888, p. 194). Nous nous proposons d'indiquer une nouvelle méthode au moyen du changement simultané de la variable et de la fonction.

Posons

$$(2) \qquad x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi, \qquad y = p\sin\varphi + p'\cos\varphi;$$

où p est la nouvelle fonction et φ la nouvelle variable $\left(p' = \frac{dp}{d\varphi}\right)$. On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\varphi,$$

$$xy = (p^2 - p'^2)\sin\varphi\cos\varphi + pp'(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$x^2 - y^2 - c^2 = (p^2 - p'^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 4pp'\sin\varphi\cos\varphi.$$

En portant ces valeurs dans l'équation différentielle, on obtient, après quelques réductions, l'expression

$$(3) \qquad 2pp' = -c^2\sin 2\varphi;$$

dont l'intégrale est

$$(4) \qquad p^2 = \frac{c^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{\alpha^2}{2};$$

α étant une constante arbitraire. C'est l'équation des coniques homofocales dans le système de coordonnées (p, φ). Pour passer de là aux coordonnées x et y, il suffit d'éliminer p et φ entre les équations (2) et (4), en tenant compte de (3). On trouve d'abord

$$x = \frac{\alpha^2 + c^2}{2p}\cos\varphi, \qquad y = \frac{\alpha^2 - c^2}{2p}\sin\varphi.$$

En portant les valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ dans l'équation (4), qui peut s'écrire

$$p^2 = \frac{c^2}{2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{\alpha^2}{2}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi),$$

on obtient

$$\frac{2x^2}{\alpha^2 + c^2} + \frac{2y^2}{\alpha^2 - c^2} - 1 = 0.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation différentielle (1). Par le changement du paramètre α^2 en $2\lambda - c^2$, elle se met sous la forme habituelle de l'équation des coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} - 1 = 0.$$

QUESTIONS.

2253. Trouver les courbes planes telles que la projection, sur une droite de leur plan, d'une corde quelconque soit proportionnelle au segment, déterminé sur cette droite, par les deux normales à la courbe, aux deux extrémités de la corde. F. BALITRAND.

2254. Soient O le pôle et Δ l'asympote d'une conchoïde de Nicomède (définie par la condition que, si le vecteur OM coupe la droite Δ en A, le segment MA soit de longueur constante). On sait que la normale à la conchoïde en M passe par le point de rencontre N des perpendiculaires élevées en O à OA et en A à Δ.

Cela posé, U étant le milieu de NA et V le symétrique de U par rapport à N, si l'on mène par U et par V des parallèles respectivement à OA et à Δ, qui se coupent en I, et que l'on élève en N à MN une perpendiculaire qui coupe OM en K, la droite KI passe par le centre de courbure μ répondant au point M de la conchoïde. M. D'OCAGNE.

2255. Étant données dans l'espace deux droites quelconques D et D′ ne se rencontrant pas, on considère sur D un point fixe A et sur D′ un point variable B d'où l'on abaisse sur D la perpendiculaire BC. Soit E l'ellipse dont CA et CB sont deux demi-axes. On demande de démontrer que :

1° La surface engendrée par l'ellipse E est un conoïde Γ dont on déterminera la directrice rectiligne et le plan directeur;

2° La section du conoïde Γ par tout plan parallèle à D est une cissoïde d'ellipse dont on déterminera les trois éléments de définition (ellipse, pôle et droite). On examinera à quelles conditions cette section peut devenir une cissoïde de cercle.

Nota. — On rappelle qu'une cissoïde d'ellipse, pour un pôle O situé sur cette ellipse est une courbe lieu d'un point M tel que si OM coupe l'ellipse en M′ et une certaine droite fixe en M″, on ait, en tenant compte du sens, $OM = M'M''$.

M. D'OCAGNE.

2256. Si C est le centre de courbure répondant à un point P d'une hyperbole équilatère de centre O, et si P′ et P″ sont les pieds des deux autres normales menées de C à l'hyperbole, la corde P′P″ est : 1° parallèle à la normale PC; 2° vue de P sous un angle droit; 3° égale à OC. Après avoir démontré ces théorèmes, on en déduira une construction des points P′ et P″ lorsque P, et par suite C, est donné. M. D'OCAGNE.

2257 (1). Si, dans une hyperbole, la tangente au point M coupe une des asymptotes au point T et que le centre O se projette orthogonalement en I sur la normale en M, la perpendiculaire élevée en T à IT passe par le centre de courbure répondant au point M. Démontrer géométriquement ce théorème obtenu à titre d'application des coordonnées parallèles (*Nouvelles Annales*, 1902, p. 232). M. D'OCAGNE.

2258. Soient (1), (2), (3), (4) les quatre côtés d'un quadrilatère complet et ABC le triangle formé par les trois diagonales. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'intersection respectifs du côté opposé BC avec les parallèles menées du sommet A à (1), (2), (3), (4); et supposons qu'on forme les points analogues B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4. Alors les quatre systèmes des trois points $A_2B_3C_4$, $A_1B_4C_3$, $A_4B_1C_2$, $A_3B_2C_1$ sont respectivement en ligne droite (1′), (2′), (3′), (4′) et ces quatre lignes droites sont parallèles entre elles. T. ONO.

ERRATA.

Page 175. Notation du répertoire bibliographique : *au lieu de* R5C, *lire* R5*c*.

Page 321. Notation du répertoire bibliographique : *au lieu de* K′, *lire* K¹.

---

(1) La construction du centre de courbure de l'hyperbole obtenue par M. R. Bouvaist (*N. A.*, 1914, p. 340) est celle même que M. d'Ocagne avait précédemment donnée (*N. A.*, 1902, p. 232) à titre d'application d'une formule relative à ses coordonnées parallèles et dont il propose, dans la question n° 2257, de trouver une démonstration géométrique directe. Le mode de démonstration de M. Bouvaist reposant sur des considérations qui dépassent de beaucoup le domaine propre de la question, celle-ci reste posée dans les termes où l'a énoncée M. d'Ocagne. (*Note de la Rédaction.*)

[M¹8a] [M⁴aα]

ÉPI- ET HYPOCYCLOÏDE ASSOCIÉES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Soient γ et γ' deux cercles de centre ω et ω' et de même rayon r, roulant l'un extérieurement, l'autre intérieurement sur un cercle Γ, de centre O et de rayon R, qu'ils touchent constamment au même point I. Si M et M′ sont les points marqués sur ces cercles, qui, à l'origine du mouvement, coïncidaient avec le point A du cercle Γ, ces points engendrent l'un une épicycloïde (M), l'autre une hypocycloïde (M′) qui peuvent être dites *associées*.

On sait qu'à chaque instant les coordonnées, rapportées aux axes que définit la figure, sont données, si l'on désigne par φ l'angle AOI, pour le point M, par

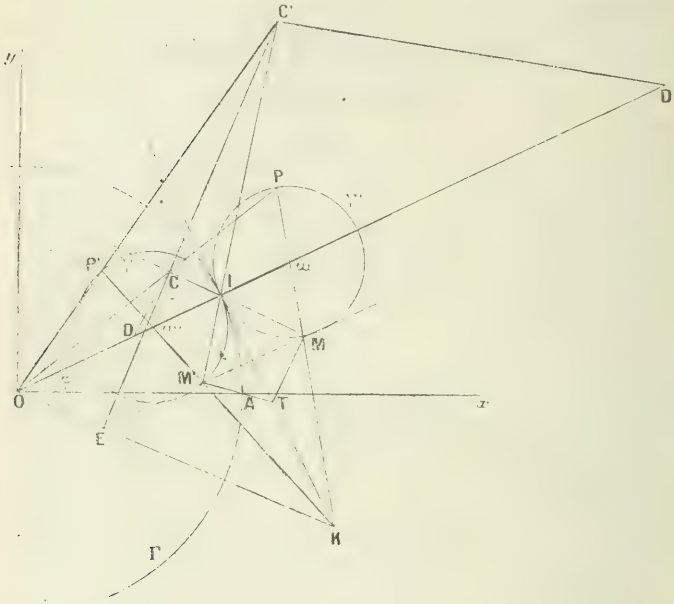
$$(1)\qquad \begin{cases} x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\dfrac{(R - r)\varphi}{r}, \\ y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{(R - r)\varphi}{r} \end{cases}$$

et, pour le point M′, par

$$(1')\qquad \begin{cases} x' = (R - r)\cos\varphi + r\cos\dfrac{(R - r)\varphi}{r}, \\ y' = (R - r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{(R - r)\varphi}{r}. \end{cases}$$

Rappelons que les normales en M et en M′ aux courbes considérées sont les droites MI et M′I, et que, par application de la construction générale dite *de*

Savary, les centres de courbure correspondants C et C′ sont déterminés sur ces normales respectivement



par les droites unissant le centre O du cercle-base aux points P et P′ diamétralement opposés à M et M′ dans les cercles γ et γ'.

2. On voit immédiatement que *le point* E *où la droite* MM′ *touche son enveloppe se trouve sur la droite unissant les centres de courbure* C *et* C′ *correspondants.*

En effet, les tangentes en M et en M′ aux courbes associées se coupent en un point T de la tangente commune aux cercles. Or, il est clair que *si les tangentes aux lieux des sommets d'un triangle variable sont concourantes, les points où les côtés de ce triangle*

touchent leurs enveloppes sont en ligne droite. Cela résulte immédiatement du fait que deux positions infiniment voisines du triangle variable sont homologiques puisque les droites unissant, de l'une à l'autre, les sommets correspondants sont concourantes [1].

Ainsi, les points E, C, C′ sont en ligne droite et l'on a la relation

$$\frac{EM.C'M'.CI}{EM'.C'I.CM} = 1.$$

D'autre part, les triangles MIω et M′Iω′, respectivement coupés par les transversales OCP et OC′P′, donnent

$$(2) \qquad 2\frac{R+r}{R}\,\frac{CI}{CM} = 1 \qquad \text{et} \qquad 2\frac{R-r}{R}\,\frac{C'I}{C'M'} = 1,$$

---

[1] Cette remarque est celle que j'avais déjà en vue en posant le 2° de la question 2169 (*N. A.*, 1911, p. 93), et, puisque j'en trouve ici l'occasion, je reviens sur cette question dont une solution, due à M. Abramescu, a déjà été donnée (*Ibid.*, p. 475) beaucoup moins simple que celle que voici : Si les tangentes MA et MB menées de M aux courbes (A) et (B) sont égales, le théorème général que j'ai donné dans les *N. A.* en 1890 (p. 290) montre que la normale au lieu de (M) passe par le barycentre des centres de courbure α et β correspondants, affectés des masses — 1 et 1, c'est-à-dire est parallèle à αβ. Cela démontre la première partie du théorème que Mannheim, ainsi que l'a fait remarquer M. Abramescu, avait retrouvée de son côté (*Développements de Géométrie cinématique*, 1894, p. 56), mais qui, on le voit, n'était que la particularisation pure et simple de mon énoncé entièrement général de 1890.

Pour la seconde partie, il suffisait de remarquer que, d'après le même théorème général appliqué aux normales NA et NB, aussi égales entre elles, la normale au lieu décrit par N était parallèle à AB et, par suite, que la tangente à ce lieu passait par M (ce qui résulte aussi, si l'on veut, de ce que le lieu de N est celui du centre d'un cercle tangent aux deux courbes en A et B). Dès lors, la remarque ci-dessus prouve que les côtés AB, NA, NB du triangle NAB touchent leurs enveloppes en des points en ligne droite, et cela démontre la seconde partie de la question 2169.

ce qui transforme l'égalité précédente en

$$(3) \qquad \frac{EM}{EM'} = \frac{R+r}{R-r}.$$

Cette égalité conduit à cette construction bien simple du point E : *si les diamètres* MP *et* M'P' *se coupent en* K (*nécessairement sur* IT), *le point* E *se trouve sur* OK.

On déduit de là une détermination facile de l'enveloppe de MM', lieu du point E.

En effet, si nous représentons par (x, y), (x', y') et (x_1, y_1) les coordonnées des points M, M' et E, nous avons, en vertu de (2),

$$\frac{x - x_1}{x' - x_1} = \frac{R+r}{R-r}$$

ou

$$2rx_1 = (R+r)x' - (R-r)x$$

et, par suite, en tenant compte de (1) et (1'),

$$x_1 = \frac{R+r}{2}\cos\frac{(R-r)\varphi}{r} + \frac{R-r}{2}\cos\frac{(R+r)\varphi}{r}.$$

On trouve de même

$$y_1 = \frac{R+r}{2}\sin\frac{(R-r)\varphi}{r} + \frac{R-r}{2}\sin\frac{(R+r)\varphi}{2}.$$

Il suffit de poser $\frac{R+r}{2} = R_1 + r_1$, $\frac{R-r}{2} = r_1$ (ce qui donne $R = R_1$), puis $\frac{(R+r)\varphi}{r} = \varphi_1$, pour mettre x_1 et y_1 sous la forme

$$x_1 = (R_1 - r_1)\cos\varphi_1 + r_1\cos\frac{(R_1 - r_1)\varphi_1}{r_1},$$

$$y_1 = (R_1 - r_1)\sin\varphi_1 - r_1\sin\frac{(R_1 - r_1)\varphi_1}{r_1},$$

formules qui montrent que *le point* E *a pour lieu une*

hypocycloïde engendrée par un cercle de rayon r_1, *ou* $\frac{R+r}{2}$, *roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon* R_1, *ou* R. A l'origine du mouvement le point E coïncide d'ailleurs, comme les points M et M', avec le point A.

3. Si nous représentons par ds et ds' les différentielles des arcs décrits simultanément par les points M et M', nous avons

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{EM.MT}{EM'.M'T} = \frac{EM}{EM'}$$

ou, d'après (3),

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{R+r}{R-r}.$$

Donc, en intégrant et remarquant que s et s' s'annulent en même temps en A,

$$(4) \qquad \frac{s}{s'} = \frac{R+r}{R-r}.$$

Considérons de même les différentielles $d\sigma$ et $d\sigma'$ des aires balayées simultanément par les segments IM et IM' des normales en M et M'.

Nous avons

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\overline{CM}^2 - \overline{CI}^2\right) d\theta,$$

$d\theta$ étant la différentielle de l'angle que MI fait avec Ox, ou, si nous remplaçons $\overline{CM}^2 - \overline{CI}^2$ par le produit $(CM + CI)(CM - CI)$,

$$d\sigma = \frac{CM + CI}{2} IM\, d\theta.$$

Mais la première formule (2) donne

$$(5)\quad \frac{CM}{2(R+r)} = \frac{CI}{R} = \frac{CM - CI}{2(R+r) - R} = \frac{IM}{R+2r} = \frac{CM + CI}{3R+2r}.$$

La précédente devient donc

$$d\sigma = \frac{(3R+2r)\,\overline{IM}^2}{2(R+2r)}\,d\theta.$$

On aurait de même

$$d\sigma' = \frac{(3R-2r)\,\overline{IM'}^2}{2(R-2r)}\,d\theta'.$$

En divisant membre à membre, et puisque $IM = IM'$, on a

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{(3R+2r)(R-2r)}{(3R-2r)(R+2r)}\,\frac{d\theta}{d\theta'}.$$

Mais, dS étant la différentielle de l'arc décrit par le point I, si les normales aux enveloppes de IM et IM', c'est-à-dire les perpendiculaires élevées à IC et IC', coupent en D et en D' la normale OI au lieu de I, on a

$$dS = ID\,d\theta = ID'\,d\theta',$$

ou, puisque les triangles rectangles ICD et IC'D' sont semblables,

$$CI\,d\theta = C'I\,d\theta',$$

ou, en vertu de (5) et de la formule analogue pour C'I,

$$\frac{R}{R+2r}\,d\theta = \frac{R}{R-2r}\,d\theta',$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{R+2r}{R-2r}.$$

Dès lors, la formule précédente devient

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{3R+2r}{3R-2r},$$

d'où, par intégration et remarquant encore que σ et σ' s'annulent ensemble en A,

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{3R + 2r}{3R - 2r}. \tag{6}$$

4. Dans le cas où $r = \frac{R}{2}$, l'hypocycloïde (M') se réduit au diamètre, aboutissant en A, du cercle Γ, en vertu du théorème généralement dit de La Hire, bien que donné, dès 1570, par Cardan, dans son *Opus novum de proportionibus numerorum* (p. 186). Quant à l'épicycloïde (M), elle est alors celle dont Huygens a reconnu l'identité avec la caustique par réflexion du cercle pour des rayons lumineux parallèles (*Œuvres*, t. VIII, p. 214), et qui a reçu depuis lors, de Proctor, le nom de *néphroïde* en raison de sa forme rappelant celle d'un rein.

Dans ce cas, la première formule (2), la formule (4) et la formule (6) donnent respectivement

$$CM = 3CI, \qquad s = 3s', \qquad \sigma = 2\sigma'.$$

Or, ici, s' représente le segment du diamètre du point A compris entre les deux positions considérées du point M', σ' l'aire limitée, entre le même diamètre et le cercle Γ, par les perpendiculaires à ce diamètre menées par ces deux positions. En particulier, la longueur de l'arc limitant chacun des deux lobes de la néphroïde est triple de celle du diamètre du cercle Γ, l'aire comprise à l'intérieur de chacun de ces lobes est égale à celle du même cercle, de telle sorte que l'aire totale de la néphroïde est triple de celle du cercle Γ. On retrouve ainsi, à titre de cas particuliers des formules ci-dessus, certains résultats démontrés d'autre façon par M. Balitrand dans une Note récente sur la néphroïde (même Tome, p. 97).

[K 11e]

NOUVEAU THÉORÈME RELATIF A DES CIRCONFÉRENCES TANGENTES;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur honoraire,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Je veux démontrer d'abord, par la Géométrie élémentaire, un théorème connu qui a été établi par des calculs algébriques. On sait que huit circonférences sont tangentes à trois cercles et forment quatre couples. Ce théorème peut s'énoncer :

La ligne des centres de chaque couple passe par le centre radical des trois cercles, et le rapport des distances de ce point aux deux centres égale le rapport des rayons des circonférences du couple.

Pour la concision, je désignerai souvent les circonférences par leurs rayons.

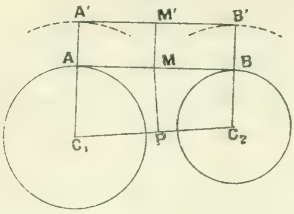
1. Je vais prouver que les centres radicaux des cercles $R_1 + h$, $R_2 + h$, $R_3 + h$ sont tous sur la même droite (R_1, R_2, R_3 étant constants, h variant de $-\infty$ à $+\infty$).

Figure 1. — Je trace AB tangente extérieure à R_1, R_2, A'B' tangente extérieure à $R_1 + h$, $R_2 + h$, M, M' leurs milieux.

Je suppose que h augmente proportionnellement au temps, M décrit la perpendiculaire à AB d'un mouve-

ment uniforme: MC, perpendiculaire à C_1C_2 et axe radical, a donc un mouvement uniforme dans le

Fig. 1.



sens C_1C. Le centre radical des trois cercles $R_1 + h$, $R_2 + h$, $R_3 + h$ ayant trois mouvements composants rectilignes et uniformes, a un mouvement résultant uniforme sur une droite. C. Q. F. D.

2. Le centre O_1 de la circonférence de rayon ρ_1 tangente à R_1, R_2, R_3 sans les envelopper est sur cette droite, car O_1 étant un point commun aux trois circonférences $R_1 + \rho_1$, $R_2 + \rho_1$, $R_3 + \rho_1$ est leur centre radical.

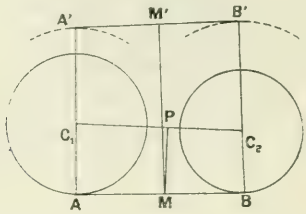
3. Le centre O'_1 de la circonférence de rayon ρ'_1 tangente à R_1, R_2, R_3 et les enveloppant est sur la même droite.

Démonstration. — O'_1 étant un point commun aux circonférences $\rho'_1 - R_1$, $\rho'_1 - R_2$, $\rho'_1 - R_3$ est leur centre radical; il est sur le lieu des centres radicaux des circonférences $h - R_1$, $h - R_2$, $h - R_3$, lieu qui est une droite, la même que la précédente, ce que je dois prouver.

Figure 2. — Soient AB tangente extérieure aux cercles R_1, R_2; $AA' = BB' = h$; M, M' leurs milieux, MP

perpendiculaire à C_1C_2 : c'est l'axe radical, sa vitesse suivant C_1C_2 est la même que ci-dessus pour les mêmes

Fig. 2.

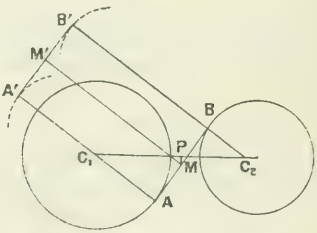


raisons. Les centres radicaux des trois circonférences variables sont donc sur une droite, la même que celle du n° 1.

4. Il faut et il suffit que j'étudie maintenant un quelconque des trois autres couples de circonférences tangentes à trois cercles.

Figure 3. — Soient les circonférences $h - R_1$, $h + R_2$; je trace la tangente intérieure AB aux cer-

Fig. 3.



cles R_1, R_2 ; $AA' = h = BB'$; M, M' les milieux de AB, A'B ; MP l'axe radical.

Le raisonnement des numéros précédents me conduit à cette conclusion : l'axe radical se meut uniformément suivant C_2C_1, le lieu des centres radicaux des

trois circonférences $h - R_1$, $h + R_2$, $h + R_3$ est une droite (nouvelle).

5. Le centre de la circonférence ρ_2 tangente à R_1 en l'enveloppant, et à R_2, R_3 sans les envelopper, est sur cette droite parce qu'il est leur centre radical (comme étant un point commun aux circonférences $\rho_2 - R_1$, $\rho_2 + R_2$, $\rho_2 + R_3$).

6. Les centres radicaux des circonférences $h + R_1$ $h - R_2$, $h - R_3$ sont sur la droite précédente (pour la démonstration, tracer l'autre tangente intérieure, et raisonner comme au n° 4).

7. Le centre de la circonférence tangente à R_1, R_2, R_3 sans envelopper R_1 et enveloppant R_2, R_3 est sur cette droite (on le démontrera aisément aussi).

Le troisième et le quatrième couple de lignes de centre des circonférences tangentes à R_1, R_2, R_3 ont les propriétés du deuxième couple (c'est évident).

8. Soient K le centre radical des cercles R_1, R_2, R_3 : O_1, O'_1, ρ_1, ρ'_1 les centres et les rayons des deux circonférences tangentes d'un des quatre couples que j'étudie.

Puisque K se meut proportionnellement à h sur la droite $O_1O'_1$, j'ai la proportion $\frac{KO_1}{KO'_1} = \frac{\rho'}{\rho'_1}$, rapport des deux valeurs qu'a h lorsque K passe en O_1 et O'_1.

Je puis, maintenant, établir mon théorème par la plus simple géométrie.

Il est nécessaire, pour la clarté et la concision, que j'adopte une notation nouvelle pour désigner les huit circonférences tangentes à trois cercles :

C'_1 sera une circonférence tangente à C_1 et ne l'enveloppant pas;

(C'_1) sera une circonférence tangente à C_1 et l'enveloppant:

$C'_1(C'_2C'_3)$ sera la circonférence tangente aux trois cercles C_1, C_2, C_3 enveloppant C_2, C_3 seulement;

$(C'_1)C'_2C'_3$ la circonférence tangente n'enveloppant que C_1;

$[C'_1C'_2C'_3][(C'_1C'_2C'_3)]$ la ligne des centres du premier couple de circonférences tangentes étudié plus haut;

$[C'_1(C'_2C'_3)][(C'_1)C'_2C'_3]$ la ligne des centres du deuxième couple de circonférences tangentes.

Voici, enfin, l'exposition de propriétés qui ont fait le sujet d'une première Note de moi insérée en octobre 1888 dans la 3e série des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Note incomplète contenant des *errata* et des erreurs.

Soient quatre cercles R_1, R_2, R_3, R_4.

Je considère les quatre groupes de trois cercles, tour à tour.

En K_1, en K_2, en K_3, en K_4 concourent quatre lignes de centre de circonférences tangentes à trois des quatre cercles. Voilà donc quatre faisceaux de quatre droites, faisceaux connus (*fig.* 1).

Voici l'énoncé de mon théorème :

Ces seize lignes de centre forment cinq autres faisceaux de quatre droites.

Démonstration. — Soient les quatre lignes de centre

$$a = [C'_1C'_2C'_3][(C_1C_2C_3)], \qquad b = [C'_2C'_3C'_4][(C'_2C'_3C'_4)],$$
$$c = [C'_3C'_4C'_1][(C'_3C'_4C'_1)], \qquad d = [C'_4C'_1C'_2][(C'_4C'_1C'_2)],$$

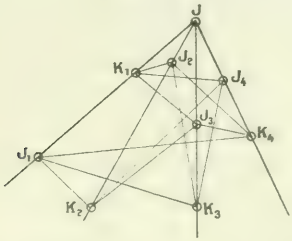
c et d concourent au point J commun aux deux premières a, b, car les tangentes menées de ce point aux quatre circonférences $R_1 + h$, $R_2 + h$, $R_3 + h$, $R_4 + h$ sont égales.

Soient les quatre lignes de centre

$$a' = [C'_1(C'_2C'_3)][(C'_1)C'_2C'_3], \qquad b' = [C'_1(C'_3C'_4)][(C'_1)C'_3C'_4],$$
$$c' = [C'_1(C'_3C'_4)][(C'_1)C'_3C'_4], \qquad d' = [C'_2C'_3C'_4][(C'_2C'_3C'_4)].$$

De J_1, point commun aux droites a', b', partent des tangentes aux quatre cercles $R_1 + h$, $R_2 + h$, $R_3 + h$.

Fig. 4.



$R_4 + h$ qui sont égales. Du point commun à c' et d' partent les mêmes tangentes. Donc, ce second point est aussi le point J_1.

Le lecteur remarquera que C'_1 figure dans les noms des trois premières lignes et pas dans la quatrième.

En remplaçant C'_1 par C'_2, par C'_3, par C'_4 et, de plus, C'_2 par C'_3, C'_3 par C'_4, C'_4 par C'_1 dans les noms du deuxième faisceau, on écrira les noms de trois autres faisceaux ayant pour centres J_2, J_3, J_4 (analogues au deuxième).

Remarque. — Sur chaque ligne du faisceau J est le centre d'un des quatre autres faisceaux J_1, J_2, J_3, J_4, plus le centre d'un des quatre faisceaux K_1, K_2, K_3, K_4.

qui étaient connus, plus deux centres de circonférences tangentes. Il y a donc, sur chaque droite du faisceau de centre J, cinq points remarquables.

[K¹2d]

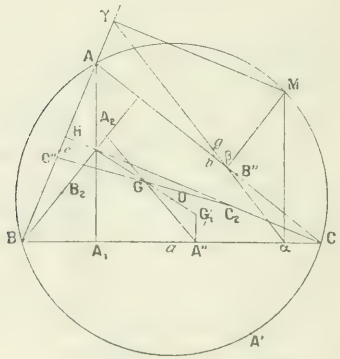
SUR UNE CONIQUE ASSOCIÉE AU TRIANGLE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Si un point décrit dans le plan d'un triangle ABC une courbe d'ordre quelconque, le lieu du centre de gravité de son triangle podaire par rapport à ce triangle est une courbe de même degré. Par suite, le centre de gravité g des projections α, β, γ d'un point variable M du cercle circonscrit au triangle sur les côtés BC, CA, AB décrit une conique Σ; cette conique est, d'ailleurs, toujours une ellipse.

Appelons H l'orthocentre du triangle, G le centre de

Fig. 1.



gravité, O le centre du cercle circonscrit, a, b, c les

milieux des côtés, A_1 le pied de la hauteur AH (*fig.* 1). Lorsque le point M est au sommet A, g est le point A_2 situé au tiers de AA_1 à partir de A; quand M est le point A′, diamétralement opposé au sommet A sur le cercle ABC, g est le point A′ obtenu en prolongeant d'un tiers le segment A_1a. Désignons par B_2 et C_2 les points analogues à A_2, obtenus en plaçant le point M aux sommets B et C, et par B″ et C″ les points analogues à A″, obtenus en prenant pour M les points diamétralement opposés à ces sommets sur le cercle ABC. On voit aisément que les droites A_2A'', B_2B'', C_2C'' se coupent au centre de gravité G et que ce point est le milieu de A_2A'', B_2B'', C_2C''.

L'ellipse Σ *a pour centre le centre de gravité du triangle.*

2. Appelons G_1 le symétrique de G par rapport à O; le point G_1 est aussi le symétrique de H par rapport à G et ses projections sur les côtés BC, CA, AB sont les points A″, B″, C″.

On sait d'autre part que, si l'on considère une droite d et que si l'on projette les sommets A, B, C sur cette droite, les perpendiculaires abaissées des points ainsi obtenus sur les côtés BC, CA, AB concourent en un point D *orthopôle* de d. Le point D est aussi le point d'intersection des droites de Simson, par rapport au triangle ABC, des points où la droite d rencontre le cercle ABC. M. Neuberg a montré [1] que, si la droite d pivote autour d'un point P, son orthopôle décrit une conique passant par les projections de P sur les côtés

---

[1] *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, juillet-août 1910).

du triangle. Nous avons remarqué [1] que cette conique est tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle et que son centre est le milieu de la droite qui joint le point P à l'orthocentre H. De ces considérations et du paragraphe précédent on déduit cette définition de la conique Σ :

L'ellipse Σ est aussi le lieu des orthopôles des droites qui passent par le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité.

En particulier :

L'ellipse Σ passe par l'orthopôle de la droite d'Euler.

En vertu de ce qui précède, on a aussi la proposition suivante :

L'ellipse Σ est tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle.

3. Considérons (*fig.* 2) un point M du cercle ABC et le centre de gravité g de ses projections α, β, γ sur les côtés du triangle. Par chaque point de la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ du point M passent les droites de Simson de deux autres points du cercle ABC; la droite qui joint ces points reste, en vertu d'une propriété bien connue, perpendiculaire à la droite $\alpha\beta\gamma$.

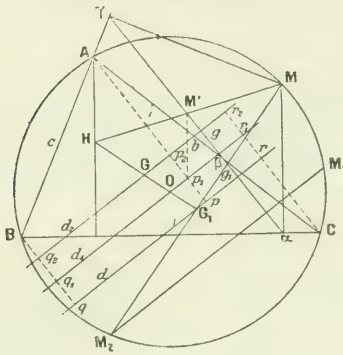
La droite $\alpha\beta\gamma$ coupe l'ellipse Σ en deux points dont l'un doit, d'après ce qui précède, être tel que les droites de Simson autres que $\alpha\beta\gamma$ qui y passent correspondent aux extrémités d'une corde du cercle ABC passant par G_1; nous allons montrer que c'est le point g.

---

[1] *Sur les ellipses tritangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Nouvelles Annales*, octobre 1913).

Appelons M′ le milieu de HM; considérons les droites d, d_1, d_2 menées par G_1, O, G perpendiculairement à $\alpha\beta\gamma$ et désignons par p, p_1, p_2 les projections

Fig. 2.



de A sur d, d_1, d_2, par q, q_1, q_2 celles de B, par r, r_1, r_2 celles de C. Le point M′ est l'orthopôle de d_1 et l'on a, en observant que M′ et p_1 sont symétriques par rapport à bc,

$$\overline{M'\alpha} = \overline{Ap_1}, \qquad \overline{M'\beta} = \overline{Bq_1}, \qquad \overline{M'\gamma} = \overline{Cr_1}.$$

Or, comme la droite d_2 passe par G, on a

$$\begin{aligned}&\overline{Ap_2} + \overline{Bq_2} + \overline{Cr_2}\\ &\quad = \overline{Ap_1} + \overline{p_1p_2} + \overline{Bq_1} + \overline{q_1q_2} + \overline{Cr_1} + \overline{r_1r_2} = 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\overline{p_1p} = \overline{p_2p_1} = \frac{1}{3}(\overline{Ap_1} + \overline{Bq_1} + \overline{Cr_1}) = \frac{1}{3}(\overline{M'\alpha} + \overline{M'\beta} + \overline{M'\gamma}).$$

On sait que l'orthopôle de d se déduit de l'orthopôle M′ de d_1 par une translation égale à $\overline{p_1p}$. Or, la dernière relation montre que cette translation donne le point g. Nous avons donc démontré ce théorème :

Le centre de gravité g des projections α, β, γ *d'un point* M *du cercle circonscrit à un triangle sur les côtés est l'orthopôle de la perpendiculaire menée par le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité sur la droite de Simson* $\alpha\beta\gamma$ *du point* M.

En particulier :

Le centre de gravité g correspondant au point M *dont la droite de Simson est perpendiculaire à la droite d'Euler est le milieu de la droite qui joint l'orthocentre au point* M [1].

4. La droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ du point M rencontre l'ellipse Σ en un second point g_1; ce point est le centre de gravité des projections α_1, β_1, γ_1 d'un point M_1 du cercle circonscrit sur les côtés. Les développements qui précèdent permettent d'obtenir aisément ce point M_1 connaissant le point M; on pourra, d'ailleurs, déterminer le point g_1 sans construire le point M_1.

Par le point g_1 passent trois droites de Simson, celles de M et M_1 et celle d'un troisième point M_2; le triangle MM_1M_2 est le *triangle orthopolaire* du point g_1. Puisque le point g_1 est le centre de gravité des projections α_1, β_1, γ_1 de M_1 sur les côtés, le côté MM_2 opposé à M_1 dans le triangle orthopolaire doit, d'après le paragraphe précédent, passer par G_1. D'autre part, comme dans un triangle orthopolaire MM_1M_2 l'un des côtés est perpendiculaire à la droite de Simson du sommet opposé par rapport au

---

[1] Cette propriété étant caractéristique pour cette droite de Simson, on peut la rapprocher de la question 4373 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1914, p. 75, 140, 185) se rapportant à cette droite.

triangle fondamental ABC, la droite $M_1 M_2$ est perpendiculaire à la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ du point M.

On a ainsi cette construction du point M_1 du cercle circonscrit auquel correspond le centre de gravité g_1, second point d'intersection de Σ avec la droite de Simson de M :

La droite qui joint le point M *au symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité recoupe le cercle circonscrit en* M_2; *la perpendiculaire menée par* M_2 *à la droite de Simson de* M *passe par* M_1.

D'autre part, le point g_1 est l'orthopôle de la droite $M_1 M_2$; il se déduit donc aisément de l'orthopôle g de la droite d. Le segment gg_1 est, en effet, égal à la distance de la droite d à $M_1 M_2$, donc égal et de sens contraire à la distance de M_2 à d.

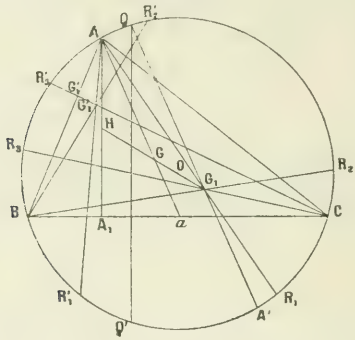
Si l'on prend sur la droite de Simson du point M, *à partir de* g, *un segment égal et de sens contraire à la distance de* M_2 *à la droite* d, *le point* g_1 *ainsi obtenu est le second point d'intersection de la droite de Simson du point* M *avec l'ellipse* Σ.

5. Les points d'intersection de l'ellipse Σ avec les côtés autres que A″, B″, C″ s'obtiennent aisément en utilisant soit la définition de la conique trouvée au paragraphe 2, soit le théorème que nous venons d'énoncer.

La droite qui joint le point A′, diamétralement opposé au sommet A sur le cercle ABC, au point G_1 recoupe ce cercle en un point Q dont la projection sur BC est un point de Σ, car la droite de Simson de A′ n'est autre que le côté BC (*fig.* 3). Or, la droite $A'G_1$

est parallèle à la médiane Aa, et, comme l'angle AQA′ est droit, QA est perpendiculaire à Aa. On obtient

Fig. 3.



donc cette construction simple des seconds points d'intersection de Σ avec les côtés :

Les perpendiculaires élevées aux sommets sur les médianes coupent le cercle circonscrit en trois points dont les projections sur les côtés correspondants sont les seconds points d'intersection de Σ avec les côtés.

Soit Q′ le point où la perpendiculaire abaissée de Q sur BC recoupe le cercle ABC. Si l'on tient compte de la première définition de la conique Σ, on voit que *la droite Q′A′ est le lieu des points tels que les centres de gravité de leurs triangles podaires appartiennent à* BC. Cette droite coupe le côté BC sur la polaire trilinéaire du centre du cercle circonscrit.

La droite de Simson de Q′ est, d'après une propriété bien connue, parallèle à AQ, et par suite perpendiculaire à la médiane Aa. On a donc la proposition suivante :

Les droites de Simson d'un triangle perpendiculaires aux médianes sont telles que leur point d'intersection avec l'un des côtés du triangle est le milieu de la distance des points d'intersection avec les deux autres côtés.

6. Appelons R_1, R_2, R_3 les points où les droites AG_1, BG_1, CG_1 recoupent le cercle ABC. La droite de Simson de R_1 coupe la hauteur AH en un point de Σ puisque cette hauteur est la droite de Simson du sommet A. On déduit de là cette construction des points d'intersection autres que A_2, B_2, C_2 des hauteurs avec la conique Σ :

Les points obtenus en portant, à partir de l'orthocentre, sur les hauteurs des segments égaux et de sens contraires aux distances de R_1, R_2, R_3 *aux côtés correspondants sont des points de* Σ.

Les points ainsi obtenus sont, en vertu du paragraphe 4, les centres de gravité relatifs aux droites de Simson des points R'_1, R'_2, R'_3 où les parallèles menées par R_1, R_2, R_3 aux côtés BC, CA, AB recoupent le cercle ABC.

Les droites AR'_1, BR'_2, CR'_3 sont donc les lieux des points tels que les centres de gravité de leurs triangles podaires par rapport au triangle ABC appartiennent aux hauteurs AH, BH, CH; elles concourent en un point G'_1, inverse triangulaire de G_1. On déduit de cette remarque le théorème suivant :

L'orthocentre est le centre de gravité du triangle podaire de l'inverse du symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité.

[K¹2d][K¹5]

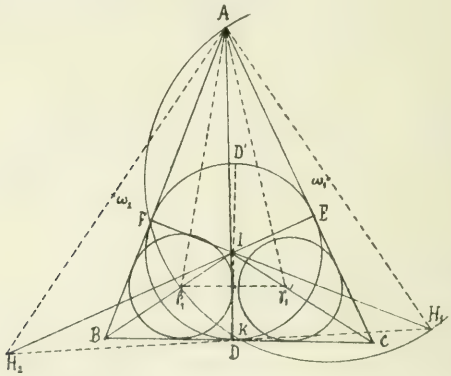
NOTES DIVERSES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

I. — POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE.

Soient un triangle ABC, les cercles inscrits et exinscrits I, I_a, I_b, I_c et D, E, F les contacts du cercle I respectivement avec les côtés BC, CA, AB. Les ortho-

Fig. 1.



centres H_1, H_2, H_3 des triangles AIB, AIC et BIC sont des points assez curieux.

1. Le quadrilatère H_1AI_cB, par exemple, est un parallélogramme, et

$$BI_c = AH_1, \qquad AI_c = BH_1, \qquad FH_1 = r_c;$$

de même

$$EH_1 = r_b, \qquad DH_3 = r_a;$$

r_a, r_b, r_c étant les rayons des cercles I_a, I_b, I_c (*fig.* 1).

D'où ces propriétés :

Les droites qui joignent respectivement les sommets du triangle $H_1H_2H_3$ *aux centres des cercles exinscrits au triangle* ABC, *passent aux milieux des côtés de ce triangle.*

Les sommets du triangle $H_1H_2H_3$ *sont situés à des distances respectives des côtés du triangle* ABC, *égales aux rayons des cercles exinscrits à ce dernier triangle.*

2. Les triangles ABH_1 et ACH_2 ont leurs angles égaux et sont semblables.

On en tire

$$AB \times CA = CH_2 \times BH_1.$$

La similitude des triangles AIH_1 et AIH_2 donne aussi

$$\overline{AI}^2 = IH_1 \times IH_2;$$

de même

$$BC \times AB = AH_2 \times CH_3; \qquad BC \times CA = AH_1 \times BH_3;$$

$$\overline{BI}^2 = IH_1 \times IH_3; \qquad \overline{CI}^2 = IH_2 \times IH_3;$$

d'où, avec les notations habituelles, les relations

$$AI \times BI \times CI = IH_1 \times IH_2 \times IH_3,$$

$$AH_1 \times AH_2 \times BH_1 \times BH_2 \times CH_2 \times CH_3 = a^2b^2c^2.$$

3. *Le triangle* $H_1H_2H_3$ *est circonscrit au triangle* DEF *des contacts du cercle inscrit* I *au triangle* ABC *avec* BC, CA, AB.

H_1H_2 par exemple passe en D, car CH_2 et BH_1

étant parallèles, les triangles rectangles semblables CH_2E et BFH_1 donnent

$$\frac{CH_2}{BH_1} = \frac{CE}{BF} = \frac{CD}{DB}.$$

4. *Les cercles* ω_1 *et* ω_2 *de diamètres* AH_1 *et* AH_2 *se coupent en un point* K *du cercle inscrit* I.

Car

$$\text{angle } \omega_1 A \omega_2 = \text{angle } EDF.$$

AH_1 et AH_2 étant deux diamètres, H_1H_2 passe au point K commun à ω_1 et ω_2. AK est donc une hauteur du triangle AH_1H_2 et l'angle AKD étant droit, AK passe au point D′ diamétralement opposé à D contact de BC avec le cercle I. D'où cette propriété :

L'axe radical des cercles ω_1 *et* ω_2 *de diamètres* AH_1 *et* AH_2 *et les axes radicaux des deux autres groupes de cercles analogues, sont les droites qui joignent respectivement les sommets du triangle* ABC *aux contacts des cercles exinscrits avec ses côtés.*

5. Les cercles ω_1 et ω_2 coupent respectivement les bissectrices CI et BI en γ_1 et γ_2, β_1 et β_2.

Les droites $\beta_1\gamma_1$ *et* $\beta_2\gamma_2$ *sont parallèles au côté* BC.

Les triangles β_1AI et γ_1IH_2 sont en effet semblables, car

$$\text{angle } H_2I\gamma_1 = 90^\circ + \frac{C}{2} = \text{angle } AIB.$$

De plus, IH_2 et IA sont des droites homologues dans

les triangles semblables ACH_2 et ABH_1. Donc

$$\frac{I\beta_1}{I\gamma_1} = \frac{IB}{IC},$$

et $\beta_1\gamma_1$ est parallèle à BC.

6. Les cercles de centres β_1 et γ_1, β_2 et γ_2, tangents à BC, forment deux groupes de cercles égaux. Soient AT_1 et AT_2 deux tangentes, l'une au cercle β_1, l'autre au cercle γ_1, ces tangentes rencontrant $\beta_1\gamma_1$ entre β_1 et γ_1.

Comme les angles $BA\beta_1$ et $CA\beta_1$ sont respectivement égaux aux angles β_1AT_1 et γ_1AT_2 et que les triangles semblables β_1AI et γ_1IH_2, dont nous venons de nous servir, donnent

$$\text{angle } IA\beta_1 = \text{angle } IH_2\gamma_1 = \text{angle } \gamma_1AF$$
(même mesure dans ω_1):

que de même

$$\text{angle } IA\gamma_1 = \text{angle } IH_1\beta_1 = \text{angle } \beta_1AE,$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\text{angle } IA\beta_1 + \text{angle } IA\gamma_1\\ &\quad = \text{angle } \gamma_1AC + \text{angle } \beta_1AB = \text{angle } \frac{A}{2},\end{aligned}$$

et cette intéressante propriété, AT_1 et AT_2 étant confondues : *L'une des tangentes intérieures aux cercles* β_1 *et* γ_1, β_2 *et* γ_2, *passe au sommet* A *du triangle* ABC.

7. Soient L le point de rencontre de BC avec la tangente AP_1 intérieure aux cercles β_1 et γ_1, AA' la hauteur du triangle ABC. Posant

$$BP_1 = x, \quad P_1C = a - x \quad \text{et} \quad AP_1 = y,$$

on trouve sans difficulté, par comparaison des aires des triangles BAP_1 et P_1AC et par application du théorème de Stewart,

$$(1)\quad 4y^2 = (b-c)^2 - a^2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{A'P_1}{y}\right)^2 = \left(\frac{b-c}{a}\right)^2;$$

d'où, en appelant α l'angle de AP_1 et AA',

$$\sin\alpha = \frac{b-c}{a},$$

en supposant $b > c$.

Soit P_2 l'intersection de BC et de la tangente commune intérieure AP_2 aux cercles β_2 et γ_2. Un calcul analogue au précédent, en remarquant que les cercles β_2 et γ_2 sont respectivement extérieurs aux triangles ACP_2 et ABP_2, donne pour y la valeur (1). Donc

$$AP_1 = AP_2,$$

et les tangentes communes intérieures aux cercles β_1 et γ_1, β_2 et γ_2, passant au sommet A *du triangle* ABC, *sont symétriques par rapport à la hauteur* AA'.

II. — Quelques propriétés de deux triangles.

1. Dans un triangle ABC, l'une des droites joignant un sommet au contact du cercle inscrit I avec le côté opposé, AD par exemple, peut être médiane, hauteur ou symédiane du triangle. Les deux premiers cas sont réalisés dans le triangle isoscèle.

Le triangle particulier dans lequel AD est une symédiane est intéressant. Comme

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{CB}{DB} = \frac{p-c}{p-b} = \frac{a+b-c}{a-b+c},$$

ses côtés vérifient l'une des relations

$$b - c = 0 \qquad \text{et} \qquad a(b + c) = b^2 - c^2.$$

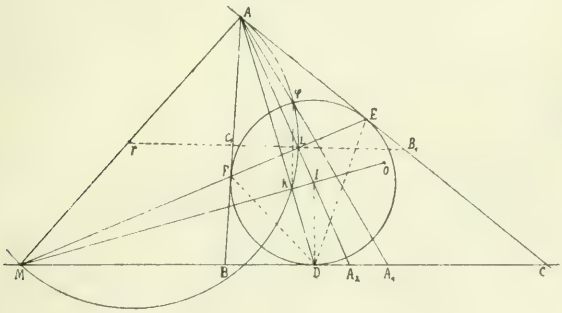
D'après le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle ABC et à la transversale EF des contacts de CA et AB avec le cercle I, cette droite rencontre BC en un point M tel que (*fig.* 2)

$$\frac{MC}{MB} = \frac{p - c}{p - b} = \frac{b^2}{c^2}$$

et :

La tangente en A *au cercle circonscrit* O *au triangle* ABC *rencontre* BC *en* M.

Fig. 2.



D'ailleurs, dans tout triangle, la corde commune au cercle circonscrit O et au cercle d'Apollonius M est la symédiane issue de A. D'autre part, la perpendiculaire abaissée de I sur AD passe au point commun de EF et BC.

Dans notre cas particulier, *cette perpendiculaire est donc la ligne des centres des cercles inscrit* I, *circonscrit* O *et d'Apollonius* M *relativement au côté* BC. Alors :

Le côté BC, *la tangente en* A *au cercle circonscrit*, OI *et* EF *sont quatre droites concourantes.*

En remarquant aussi que

$$\cos A = \frac{a}{b+c},$$

on observe que :

La somme des projections l'un sur l'autre des côtés AB, CA *égale le côté* BC.

De plus, comme

$$a(b+c) = b^2 + c^2 = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{2}, \qquad \frac{a}{b+c} \geqq \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que

$$\cos A \geqq \frac{1}{2}, \qquad \text{ou} \qquad A \leqq 60^\circ$$

et :

L'angle A *du triangle* ABC *est au plus égal à* 60°.

En appelant l la distance du point de Lemoine au côté BC, on a

$$l = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2aS}{a(a+b+c)} = \frac{S}{p} = r;$$

donc :

Le point de Lemoine du triangle et le centre du cercle inscrit sont situés sur une même parallèle au côté moyen BC.

Dans un tel triangle, le point φ de Feuerbach est également curieux : *il est situé sur la médiane* AA_1 *du triangle.*

En effet, le cercle podaire γ du point M de OI a pour diamètre AM et passe, comme on sait, au point

de Feuerbach du triangle ABC. Il contient aussi visiblement le milieu L de la bissectrice intérieure AA_2 ainsi que le point K d'intersection de OI et AD.

D'autre part, AA′ étant la hauteur du triangle, nous montre que

$$A'K = \varphi A \text{ (}^1\text{)};$$

φ, intersection des cercles I et γ, est donc symétrique de K par rapport à $\gamma C_1 B_1$, droite des milieux de AB et CA. Alors, dans le cercle γ,

$$\text{arc } KL = \text{arc } L\varphi, \qquad \text{et} \qquad \text{angle } LA\varphi = \text{angle } KAL,$$

L étant aussi l'intersection de $C_1 B_1$ avec le cercle γ.

$A\varphi$ est donc symétrique de AD par rapport à la bissectrice intérieure AA_2 de l'angle A, c'est-à-dire la *médiane* AA_1 du triangle ABC.

Comme

$$\overline{ID}^2 = IK \times IM,$$

K intersection de OI et AD, on a cet autre résultat :

Le cercle podaire γ de M, *par rapport au triangle* ABC, *est orthogonal aux cercles inscrit* I *et circonscrit* O. *Sa tangente en φ est la ligne des centres des cercles inscrit et d'Euler de* ABC.

Les quadrilatères $MAFA_2$ et $MAEA_2$ ont pour axe de symétrie AEF, et la figure AEA_2F est un losange : EA_2 et A_2F *sont respectivement parallèles à* AB *et* CA.

Cette propriété permet de trouver les relations sui-

---

(1) *Sur quelques théorèmes de Géométrie élémentaire* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 171).

vantes dans ce triangle :

$$(p-a)^2=(p-b)(p-c); \qquad r_a^2=r_b\times r_c;$$
$$b^2=(p-c)(b+c); \qquad c^2=(p-b)(b+c);$$
$$\operatorname{tang}^2\frac{A}{2}=\operatorname{tang}\frac{B}{2}\times\operatorname{tang}\frac{C}{2}; \qquad S=p^2\operatorname{tang}^3\frac{A}{2}=r^2\operatorname{tang}\frac{A}{2};$$
$$\cot^3\frac{A}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$
$$=\left(\operatorname{tang}\frac{A}{2}+\operatorname{tang}\frac{B}{2}+\operatorname{tang}\frac{C}{2}\right)^3;$$
$$bc=(p-a)(b+c); \qquad 4Rr_a=b^2+c^2.$$

2. Parmi les positions particulières du point de Gergonne dans le plan du triangle, celle où ce point P est situé sur l'une des droites joignant les milieux de deux côtés, est assez curieuse. Supposons un triangle ABC dans lequel B_1C_1 contient P, B_1 et C_1 milieux respectifs de CA et AB.

De l'égalité

$$(\alpha) \qquad \frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{AP}{PD}=1,$$

D, E, F étant les contacts du cercle inscrit I avec BC, CA, AB, on tire sans difficulté les relations suivantes entre les éléments de ce triangle :

$$(1) \qquad a(p-a)=(p-b)(p-c);$$
$$(2) \qquad r_a=r_b+r_c;$$
$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\operatorname{tang}\frac{B}{2}+\operatorname{tang}\frac{C}{2}; \qquad ap=r_a^2;$$
$$2r_a=4R+r; \qquad \frac{r}{4R}=\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$
$$\cot\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}; \qquad a=p\operatorname{tang}^2\frac{A}{2}=r_a\operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

En observant que

$$a=(p-b)+(p-c),$$

la relation (1) prouve que $(p-a)$ *est demi-moyenne harmonique entre* $(p-b)$ *et* $(p-c)$.

On a aussi

$$\frac{r+r_b+r_c-r_a}{4} = OA_1 = \frac{AH}{2},$$

soit

$$OA_1 = \frac{r}{4} \qquad \text{et} \qquad AH = \frac{r}{2}$$

et :

L'orthocentre H *du triangle est à une distance du sommet* A *égale à la moitié du rayon du cercle inscrit* I.

On en conclut que *le point* φ *de Feuerbach est sur la droite* D'A' *joignant l'extrémité du diamètre* DID' *au symétrique du sommet* A *par rapport à l'orthocentre.*

Enfin la relation (α) peut aussi s'écrire

$$\frac{CE_1}{E_1A} + \frac{BF_1}{F_1A} = 1,$$

E_1, F_1 étant les contacts des cercles exinscrits I_b et I_c avec CA et AB, et :

Dans le triangle ABC *où le point de Gergonne est situé sur la droite* B_1C_1 *des milieux de* CA *et* AB, *la droite* E_1F_1, *qui joint les contacts de ces côtés avec* I_b *et* I_c, *passe au point de concours* G *des médianes du triangle.*

On peut construire un tel triangle connaissant $BC = a$ et le rayon r du cercle inscrit, par exemple.

Enfin, d'après la relation (2) :

Le point de concours des médianes du triangle $I_aI_bI_c$ *relatif au triangle* ABC *est situé sur le côté* BC.

III. — Théorème sur la parabole.

Nous avons donné, dans la 38e *année du Journal de Vuibert*, le théorème suivant :

On donne un triangle ABC *circonscrit à une parabole. La perpendiculaire à l'axe menée par le sommet* A *rencontre le cercle circonscrit au triangle en un point* α *tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur* BC *passe au foyer de la parabole.*

Soit une parabole Σ de foyer F, de directrice D, inscrite à un triangle ABC. La perpendiculaire $A\alpha$ à l'axe rencontre le cercle ABC en α.

On sait que ce cercle ABC contient le foyer F. Traçons BE parallèle à l'axe

$$\widehat{\alpha FB} = \widehat{\alpha AB} = 90^\circ - \left(\widehat{AB, BE}\right) = 90^\circ - \widehat{FBC}$$

(d'après un théorème classique);

αF est donc bien perpendiculaire sur BC.

Ce théorème donne immédiatement les propriétés suivantes relatives aux points de Feuerbach et de Steiner d'un triangle, en se rappelant les théorèmes énoncés dans mes articles : *Sur le point de Feuerbach* (1) et *Sur quatre triangles homothétiques* (2).

a. Soient A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés d'un triangle* ABC. *Par* A_1 *on mène la parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC; *elle rencontre le cercle des neuf*

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1914, p. 107 et 110.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mai 1915, p. 209.

points en α. *La perpendiculaire abaissée de* α *sur* B_1C_1 *passe au point de Feuerbach du triangle* ABC.

b. Soient D, E, F *les points de contact des côtés d'un triangle* ABC *et de son cercle inscrit* I. *Par* D *on mène une parallèle à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit; elle rencontre le cercle inscrit en* α. *La perpendiculaire abaissée de* α *sur* EF *passe au point de Feuerbach du triangle* ABC.

c. Soient A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés;* A', B', C' *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC. *Par* A_1 *et* A' *on mène les parallèles à la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle* ABC. *Elles rencontrent le cercle des neuf points du triangle* ABC *en* α_1 *et* α_2. *Les perpendiculaires abaissées de* α_1 *et* α_2 *respectivement sur* B_1C_1 *et* $B'C'$ *passent au point de Steiner du triangle* ABC.

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *A propos des points associés de Fagnano.* — Voici une remarque qu'il y aurait lieu de joindre à ma Note récente sur les points associés de Fagnano (*N. A.*, 1915, p. 337) :

Je fais voir, dans cette Note, que le point dont j'ai naguère étudié les propriétés (*N. A.*, 1886, p. 370), où la *déviation*, angle de la normale avec le diamètre correspondant du cercle principal, atteint son maximum, se confond avec le *point limite* de Fagnano (où le couple des points associés se réduit à un point unique).

Or, j'ai également envisagé, dans des études parues en ce même Recueil, d'autres points correspondant, sur un quadrant d'ellipse, à certains maxima : le point où l'*écart normal*, angle de la normale et du diamètre de l'ellipse, est maximum, pour lequel l'anomalie excentrique est égale à 45° (*N. A.*, 1888, p. 270); celui où *la normale découpe dans l'ellipse le segment d'aire maximum* et, par suite, aussi celui d'aire minimum, qui est tel que cette normale soit inclinée à 45° sur les axes (*N. A.*, 1896, p. 217).

Or, *ces deux points remarquables constituent un couple de points associés de Fagnano.* En effet, les coefficients angulaires des diamètres correspondants du cercle principal, respectivement égaux à 1 et $\frac{b}{a}$, satisfont bien à la formule (2) de la Note citée.

Un calcul des plus faciles montre que la commune

distance au centre de l'ellipse des normales en ces deux points est donnée par $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$; telle est donc aussi l'expression de la différence des arcs déterminés sur le quadrant d'ellipse, à partir des deux sommets, par ces points associés particuliers.

M. T. Ono. — *Au sujet des questions* 2201 *et* 2238. — La solution 2201 (1914, 333) de M. Barisien est exacte. Mais le résultat

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{2(a^3+b^3)^3+3ab(a^2+b^2)^2-a^3b^3}{(a+b)^5(a^2+b^2)^2(a^3-b^3)(a^4+a^2b^2+b^4)^2}$$

peut se simplifier, en divisant haut et bas par

$$(a^3+ab+b^3)^2.$$

On a alors

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{2a^2-ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)^3(a^3+b^3)^3}.$$

La question 2238 (1915, 55) est comprise dans l'énoncé 2221 (1914, 191). Il y a donc lieu d'annuler cette question 2238.

Un abonné. — Je crois pouvoir exprimer le regret que la documentation bibliographique fasse trop souvent défaut dans des articles d'ailleurs intéressants, mais qui seraient plus utiles encore si les auteurs y attachaient plus d'importance. Des résultats absolument nouveaux sont bien difficiles à obtenir et se rencontrent rarement; et c'est pourquoi il serait bien nécessaire d'indiquer les sources, dans la mesure où cela est possible sans trop de peine. Ne pourrait-on, notamment, faire mention des articles publiés dans les *Nouvelles Annales* elles-mêmes, et qui se rapportent au sujet que l'on traite?

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

511.

(1850, p. 46.)

Soient sept carrés égaux, de telle sorte que chaque carré peut tourner à charnière seulement autour de la droite qui lui est commune avec le carré voisin (voir la figure, 1915, p. 331); *le carré* 1 *ne pourra prendre une position quelconque qu'envers le carré* 7, *et pas envers les autres carrés. Ainsi, si le carré* 1 *est maintenu fixe, il n'y a que le carré* 7 *qui soit entièrement libre.* MÖBIUS.

SOLUTION
Par M. R. B.

Il est vrai que cet énoncé est très mal rédigé, mais, contrairement à l'opinion de M. Laisant (p. 331), il me paraît facile d'en restituer le sens, à la condition d'y reconnaître une question de *Géométrie dans l'espace*.

Möbius considère 7 corps rigides, constitués par les carrés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, chacun de ces corps étant articulé à charnières avec le suivant.

Si l'on suppose fixe le carré 1, le carré 2 possède une liberté du premier degré (c'est-à-dire qu'il peut occuper ∞^1 positions); le carré 3 possède une liberté du deuxième degré; ...; le carré 7, une liberté du sixième degré. Ce dernier carré, et celui-là seul, est donc complètement libre, comme l'affirme l'énoncé. Autrement dit, ce carré peut être amené à occuper dans l'espace une position quelconque (dans une certaine région, bien entendu).

La question est, on le voit, très banale.

718.

(1865, p. 48.)

Trouver l'équation de la podaire négative de la développante de l'ellipse, le centre étant le pôle. STREBOR.

Solution
Par M. H. Brocard.

Soient M un point d'une courbe (C), PMP′ la perpendiculaire en M au rayon vecteur OM.

L'enveloppe des droites PMP′ sera, par définition, la podaire négative ou inverse de la courbe (C).

Si la courbe (C) est la développée (δ) de l'ellipse (E), il y aura moyen de parvenir à l'équation algébrique de la podaire négative de (δ), comme déjà pour celle de l'ellipse (E) ou la courbe dite de Talbot, mais cette recherche ne laissera pas d'être extraordinairement compliquée.

Au contraire, s'il s'agit bien d'une développante (Δ) de l'ellipse (E), la question **718**, telle qu'elle est énoncée, n'admettra pas de solution en l'état actuel de l'analyse, car il sera impossible d'obtenir l'équation de la courbe (Δ) en termes finis, même en prenant pour origine un des sommets de (E).

L'impossibilité sera encore plus manifeste pour une podaire positive ou négative de (Δ).

Je ne pense pas que *Strebor* (W. Roberts) ait lui-même publié la moindre indication pour une réponse quelconque attendue ici depuis cinquante ans révolus.

1505.

(1884, p. 417; 1902, p. 566; 1903, p. 48.)

De chaque point M *du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la droite de Simson relative à ce point et à ce triangle; on demande :*

1° *Le lieu du pied* P *de cette perpendiculaire;*

2° *L'enveloppe de la droite* MP. M. d'Ocagne.

Solution
Par l'auteur.

Ce problème est une occasion d'appliquer la forme remarquablement élégante que M. Badoureau a su donner naguère à l'équation de la droite de Simson (*Nouvelles Annales*, 1879, p. 33).

L'origine des coordonnées rectangulaires étant prise au centre du cercle des neuf points du triangle donné ABC et la

direction de l'axe Ox choisie de telle sorte que, si les rayons du cercle circonscrit aboutissant en A, B, C font avec cette direction les angles α, β, γ, on ait

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi,$$

si d'ailleurs r est le rayon du cercle circonscrit, φ l'angle que le rayon de ce cercle aboutissant en M fait avec Ox, on a, pour la droite de Simson relative au point M et au triangle ABC, l'équation

$$(1) \qquad x \sin\frac{\varphi}{2} + y \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{2} \sin\frac{3\varphi}{2},$$

et l'on trouve aisément pour son enveloppe les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi + \dfrac{r}{2}\cos 2\varphi, \\ y = r\sin\varphi - \dfrac{r}{2}\sin 2\varphi, \end{cases}$$

qui définissent une hypocycloïde à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon $\frac{r}{2}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{3r}{2}$.

La perpendiculaire MP à la droite de Simson menée par le point M a pour coefficient angulaire $\cot\frac{\varphi}{2}$. Mais, pour que son équation ait une forme simple, *il faut ramener, en conservant la direction des axes, l'origine au centre du cercle circonscrit*, parce qu'alors les coordonnées du point M sont

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Dans ces conditions, l'équation de cette perpendiculaire est

$$(y - r\sin\varphi)\sin\frac{\varphi}{2} = (x - r\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}$$

ou

$$(3) \qquad x\cos\frac{\varphi}{2} - y\sin\frac{\varphi}{2} = r\cos\frac{3\varphi}{2}.$$

Le point où cette droite touche son enveloppe est à son intersection avec la droite dont l'équation est la dérivée de la

précédente par rapport à φ, soit

$$x \sin \frac{\varphi}{2} - y \cos \frac{\varphi}{2} = 3 r \sin \frac{3\varphi}{2}.$$

De ces deux équations on tire facilement

$$(4) \qquad \begin{cases} x = 2r \cos \varphi + r \cos 2\varphi, \\ y = 2r \sin \varphi + r \sin 2\varphi, \end{cases}$$

qui définissent une hypocycloïde à trois rebroussements semblable à la précédente, avec des dimensions doubles, mais ayant un de ses sommets sur Ox, alors que la précédente y a un de ses points de rebroussement.

En somme, puisque d'un sommet à un rebroussement d'une telle hypocycloïde, il y a un écart angulaire de $\frac{\pi}{3}$, on voit que l'on passe de la première à la seconde au moyen de : 1° une homothétie de rapport 2 relativement au centre du cercle des neuf points; 2° une rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de ce point; 3° une translation amenant le centre du cercle des neuf points du triangle ABC sur le centre de son cercle circonscrit.

Pour trouver le lieu du point de rencontre des droites définies, par rapport à l'un et à l'autre des systèmes de coordonnées, par les équations (1) et (3), il faudrait les rapporter à un même système d'axes en remplaçant, par exemple, dans l'équation (3), x et y par $x + x_1$ et $y - y_1$, x_1 et y_1 étant les coordonnées du centre du cercle des neuf points rapportées aux axes menés par le centre du cercle circonscrit, c'est-à-dire

$$x_1 = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{2}, \qquad y_1 = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2}.$$

L'équation ainsi obtenue, jointe à (1), définirait les coordonnées du point P, rapportées aux axes menés par le centre du cercle des neufs points, en fonction de l'angle φ. Mais ni les expressions explicites, faciles à former, de x et de y en fonction de cet angle, ni l'équation en x et y qui s'obtiendrait par l'élimination de φ entre les deux équations ne semblent devoir offrir de caractères particulièrement intéressants.

1531.

(1885, p. 248.)

Le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe a un volume constant. GENTY.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Ce théorème est une application immédiate de la théorie des invariants. D'ailleurs c'est par cette méthode qu'il se trouve démontré dans un article de M. Mangeot (*Nouv. Ann.*, 1886, p. 480).

1630.

(1892, p. 114.)

Voir énoncé, 1915, p. 139.

NOTE

Par M. R. BOUVAIST.

Dans le numéro de mars 1915 (p. 139), M. Brocard déduit la solution de la question **1630** de la proposition suivante :

On donne un triangle ABC et une ellipse, tangente en B et C aux côtés AB et AC et passant par le barycentre G. Le rayon de courbure en ce point est le même que celui du cercle circonscrit au triangle si ledit *triangle* est moyen en A.

Voici de cette proposition une démonstration très simple :

Soit ω le centre de l'ellipse considérée, soit M le milieu de BC. On a

$$\overline{\omega G}^2 = \omega M . \omega A,$$

d'où, puisque

$$3MG = MA, \qquad \omega G = 2\omega M,$$

on a aussi, si ωK est le diamètre parallèle à BC,

$$\frac{\overline{\omega M}^2}{\overline{\omega G}^2} + \frac{\overline{MB}^2}{\overline{\omega K}^2} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \omega K = \frac{2MB}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{\sqrt{3}}.$$

Si ρ est le rayon de courbure en G,

$$\rho = \frac{\overline{\omega K}^2}{\omega G \sin AMC} = \frac{\overline{BC}^2}{3\omega G \sin AMC}$$

et

$$\rho = \frac{\overline{BC}^2}{2A\alpha \sin AMC} = \frac{\overline{BC}^2}{2AH},$$

H étant le pied de la hauteur issue de A, d'où

$$\rho = \frac{AB.AC}{2AH} = R,$$

rayon du cercle circonscrit à ABC.

1770.

(1897, p. 291.)

Soient

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + pw^2 = 0$$

l'équation d'une surface de second ordre conjuguée au tétraèdre de référence; a, b, c, d, e, f les arêtes de ce tétraèdre; A, B, C, D *les aires de ses faces et* V *son volume; α, β, γ les demi-axes de la surface; on a*

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = -36\,\frac{l^3m^3n^3p^3A^2B^2C^2D^2V^2}{(mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2)^4},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -lmnp\,\frac{\left\{\begin{array}{l} mnA^2D^2a^2 + nlB^2D^2b^2 + lmC^2D^2c^2 \\ \quad + lpB^2C^2d^2 + mpC^2A^2e^2 + npA^2B^2f^2 \end{array}\right\}}{(mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2)^2},$$

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 = \frac{l^2m^2n^2p^2(l+m+n+p)(A^2B^2C^2D^2)}{(mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2)^3}.$$

La condition pour que la surface représente un paraboloïde est donc

$$mnpA^2 + nplB^2 + plmC^2 + lmnD^2 = 0.$$

GENTY.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

La question **1770** revient à calculer les longueurs des axes d'une quadrique donnée par son équation en coordonnées tétraédriques; le tétraèdre de référence étant conjugué par rapport à la quadrique.

Le calcul a été fait dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où le tétraèdre de référence est quelconque, par l'ainxiu

(*Géométrie analytique*, t. II, 1re Partie, p. 418 et suiv.). Les formules auxquelles il arrive sont fort compliquées, malgré leur symétrie. Elles se simplifient notablement dans le cas où le tétraèdre de référence est conjugué par rapport à la quadrique et l'on retrouve les formules de la question **1770**. (*Voir* aussi Koelher, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, t. II, p. 318.)

1834.

(1900, p. 95.)

Étant données deux coniques S *et* S′, *trouver le lieu d'un point* P *tel que l'on puisse mener de ce point une tangente à* S *et une tangente à* S′ *perpendiculaires entre elles.*

Montrer que ce lieu est une courbe C_8 *du huitième ordre et du premier genre ayant les points cycliques pour points quadruples et huit points doubles à distance finie. On déterminera la position de ces derniers en montrant que ce sont les points communs à distance finie à trois courbes du quatrième ordre, dont on formera les équations. On établira que les points multiples de* C_8 *et les foyers réels et imaginaires des deux coniques* S *et* S′ *sont sur une même courbe* C_3 *du troisième ordre qui dégénère en une hyperbole équilatère et la droite de l'infini, lorsque* S *et* S′ *sont concentriques. On donnera une définition géométrique de cette courbe* C_3. *Le lieu cherché* C_8 *est tangent en huit points à chacune des coniques données; les seize points de contact sont sur une même courbe du quatrième ordre.*

Exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

Examiner les cas particuliers où l'une des coniques données se réduit à une parabole ou à un couple de droites.

J. Franel.

Solution

Par M. H. Brocard.

La première étude à ce sujet me paraît due à Terquem, dans un article de ce Journal, t. VIII, 1849, p. 282-284 : *Note sur l'angle droit circonscrit à deux coniques.*

Par une analyse très simple, il montre que le lieu est

toujours du huitième degré, à moins que l'une des coniques ne soit une parabole, car alors il devient du sixième degré.

Je ne crois pas qu'il ait été reparlé de cette recherche, sauf peut-être dans la courte *Note de Géométrie* de M. J. Réveille, 1902, p. 311-313, mais celle-ci n'ajoute rien à celle de Terquem.

La question a été reprise avec plus de détail sous le n° **2289**, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, où M. G. Espanet a fait deux réponses, 1902, p. 217-220, et 1903, p. 84-88.

En réalité, M. Franel a devancé, dès 1900, les recherches susmentionnées et a étudié complètement et à fond la courbe orthoptique dont M. Espanet a seulement signalé quelques propriétés essentielles, mais ses deux études (*loc. cit.*) fourniront certainement le moyen d'établir les propositions de M. Franel.

C'est ce qui m'a déterminé à les signaler en manière de première réponse à la question **1834**.

1920.

(1902, p. 48, 230, 288.)

Le produit du rayon de courbure en un point d'une hyperbole par la distance du centre à la tangente correspondante est égal, en valeur absolue, au carré du segment de la tangente compris entre le point de contact et l'une des asymptotes. M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Sans rien préjuger de la courbe cherchée, soient $M(x, y)$ un de ses points, MT la tangente, rencontrant Oy en T, et dont l'équation est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

La distance OP à MT est

$$\delta = \frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

et le rayon de courbure en M

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

D'autre part,

$$\overline{MT}^2 = x^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).$$

L'équation différentielle de la courbe sera donc

$$R\delta = \overline{MT}^2$$

ou simplement

$$y - x\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Par différentiation, elle deviendra

$$3\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

et trois intégrations successives donneront, sans difficulté, l'équation

$$y + Bx + C = \frac{A}{2x}.$$

Si l'on cherche à en déduire l'équation différentielle, on reconnaît qu'il faut prendre $C = 0$.

On a donc, en définitive, des hyperboles dont O est le centre et Oy une des asymptotes.

QUESTIONS.

2259. Soit PQR le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales à une ellipse (E), issues d'un point de cette ellipse. Démontrer que le triangle PQR est inscrit à une ellipse passant par les sommets de la développée de (E).

T. Ono.

2260. On donne un losange ABCD et le cercle inscrit O. Une tangente variable rencontre les côtés BC et CD en M et N entre B et C, C et D. Montrer que l'aire du triangle AMN reste constante.

V. Thébault.

2261. On considère un tétraèdre SABC trirectangle en S et une sphère quelconque Γ passant par A, B, C et recoupant les arêtes SA, SB, SC en α, β, γ. Montrer que :

1° Le sommet S, l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$, le point de concours des médianes du triangle ABC et le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre SABC sont en ligne droite;

2° Le sommet S, l'orthocentre du triangle ABC, le point de concours des médianes du triangle $\alpha\beta\gamma$ et le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $S\alpha\beta\gamma$ sont en ligne droite.

V. Thébault.

2262. Soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit I avec BC, CA, AB, et A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés d'un triangle ABC.

1° Calculer les distances du point φ de Feuerbach aux côtés du triangle;

2° Démontrer la relation

$$\varphi D \cos\frac{A}{2} = \varphi E \cos\frac{B}{2} + \varphi F \cos\frac{C}{2};$$

3° Montrer que la perpendiculaire sur AD menée du point

commun à B_1C_1 et EF passe au milieu du rayon ID′ du cercle inscrit, D′ étant l'extrémité du diamètre DID′.

V. Thébault.

2263. Dans un triangle ABC, A_1, B_1, C_1 sont les milieux des côtés BC, CA, AB; D, E, F sont les contacts de ces côtés avec le cercle inscrit I, φ le point de Feuerbach et P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2 les projections orthogonales de φ sur les côtés des triangles $A_1B_1C_1$ et DEF. Démontrer les relations :

1° $$\frac{\varphi A_1 \times \varphi B_1 \times \varphi C_1}{\varphi D \times \varphi E \times \varphi F} = \left(\frac{R}{2r}\right)^2;$$

2° $$\frac{\sin A}{\varphi P_1} + \frac{\sin B}{\varphi Q_1} + \frac{\sin C}{\varphi R_1} = 0;$$

3° $$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\varphi P_2} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\varphi R_2} = 0.$$

V. Thébault.

2264. Démontrer que, si la tangente en P à une courbe (P) quelconque coupe les axes rectangulaires Ox et Oy en S et T, et si la tangente en la courbe (M), que décrit le milieu M de ST, coupe Ox et Oy en U et V, on a

$$\frac{MU}{MV} = \frac{PS}{PT},$$

et déduire de là une construction géométrique de la tangente UV quand le point P est donné et réciproquement.

M. d'Ocagne.

2265. Construire les foyers et les sommets de l'axe focal d'une conique dont on donne un point, le centre de courbure correspondant, et : 1° soit un axe; 2° soit le centre.

M. d'Ocagne.

2266. On considère toutes les conchoïdes d'une courbe (M) quelconque par rapport à un pôle O. Pour chaque position du rayon vecteur OM le lieu des centres de courbure répondant à toutes ces conchoïdes est une conique Γ dont on donnera une

détermination géométrique complète. Reconnaître à quelle condition géométrique la conique Γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, en remarquant qu'elle ne peut jamais être un cercle. Examiner spécialement le cas où la courbe (M) est une spirale d'Archimède de pôle O et déterminer dans ce cas les axes de la conique Γ. M. D'OCAGNE.

2267. Démontrer géométriquement que si la normale en un point M d'une parabole rencontre en N l'axe de cette courbe, en P la tangente au sommet, et si Q est le milieu de MN, le rayon de courbure en M est le double de PQ.

M. D'OCAGNE.

2268. Si, d'un point M pris sur une conique, on mène à cette courbe les trois normales MP, MQ, MR autres que la normale en M, le triangle PQR, inscrit à la conique donnée, est en temps circonscrit à une conique fixe [1]. G. FONTENÉ.

2269. Étant donnée la courbe de Viviani représentée par les équations

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0, \qquad x^2+y^2-ax=0;$$

démontrer qu'une droite qui se déplace en s'appuyant sur cette courbe, sur l'axe Oz et en restant parallèle au plan xOy, rencontre constamment une seconde courbe de Viviani située sur une sphère à laquelle la droite reste tangente.

F. BALITRAND.

2270. Démontrer que le cône qui a pour sommet le point double d'une courbe de Viviani et pour base cette courbe est de révolution. F. BALITRAND.

---

[1] *Sur les propriétés des triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre* (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 579; *Revue de Mathématiques spéciales*, 1900, p. 473). Les triangles PQR ont déjà été considérés par M. WEILL (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 60).

NOTE DE LA RÉDACTION

AU SUJET DES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

L'appel adressé à nos lecteurs par l'article publié dans le numéro de juin dernier a reçu de beaucoup d'entre eux un accueil dont nous ne saurions assez les remercier. Grâce à leur concours, nous avons le droit d'espérer que la liste des questions restées sans solutions subira des réductions notables.

Dans le numéro de janvier 1916, nous rééditerons cette liste de la page 246, modifiée d'après les solutions annoncées, reçues ou publiées.

En outre, dans le courant de l'année prochaine, nous réimprimerons successivement les énoncés de ces anciennes questions restées jusqu'ici sans réponse.

Rappelons que nous entendons par là les questions proposées depuis la fondation du Journal (1842) jusqu'à la fin de l'année 1910.

[K'6a]

LE CALCUL SYMBOLIQUE DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES;

PAR M. A. AURIC,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Nous nous proposons d'exposer dans ce Mémoire, d'une manière systématique, le calcul symbolique des coordonnées barycentriques.

Nous étudions d'abord les combinaisons linéaires des points-masse qui conduisent aux différences de points vulgairement appelés *couples* et improprement *vecteurs libres;* la propriété caractéristique de ces points de masse nulle est d'être situés sur le plan de l'infini de l'espace considéré.

Nous étudions ensuite les éléments-masse de degré supérieur et nous établissons les formules générales permettant de déterminer les diverses grandeurs géométriques qui en résultent : distance de deux points, surface d'un triangle, volume d'un tétraèdre, distance d'un point à une droite et à un plan, distance de deux droites, etc.

Nous résolvons complètement le problème qui consiste à déterminer dans un espace quelconque le nombre minimum d'éléments-masse auxquels une combinaison linéaire de tels éléments peut être ramenée.

Enfin, nous donnons en terminant les principes du calcul symbolique des systèmes linéaires.

Définitions générales. — Considérons, dans un domaine ou espace à k dimensions $O(1, 2, 3, \ldots, k+1)$ ou O'_{k+1}, $k+1$ pôles géométriques ou points de réfé-

rence $O_1, O_2, \ldots, O_{k+1}$ auxquels sont respectivement appliqués $k+1$ masses ou coefficients algébriques m_1, $m_2, \ldots, m_{k+1}$ qui peuvent être par exemple des nombres algébriques appartenant à un corps C.

Ces masses ont pour résultante une masse totale

$$m_0 = \Sigma m_i$$

appliquée en un point géométrique M appartenant à l'espace O^1_{k+1}, lequel peut être précisément défini par l'ensemble des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}$.

On dit que $m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}$ sont les coordonnées barycentriques du point-masse $m_0 M$ avec l'égalité fondamentale symbolique

$$m_0 M = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \ldots + m_{k+1} O_{k+1}.$$

Les coordonnées barycentriques constituent un cas particulier des substitutions linéaires, car, dans la substitution linéaire générale

$$n_0 N = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \ldots + m_{k+1} O_{k+1},$$

on aura généralement

$$\Sigma m_i = m_0 \neq n_0 :$$

il suffira dès lors de poser

$$M = \frac{n_0}{m_0} N$$

pour ramener la substitution à une définition de coordonnée barycentrique.

Sous-groupes de l'espace primitif. — Si

$$m_{k+1} = m_k = m_{k-1} = \ldots = m_{k-i+1} = 0$$

et $m_{k-i} \neq 0$, on dit que M appartient à l'espace

$$O(1, 2, \ldots, k-i) \qquad \text{ou} \qquad O^1_{k-i}$$

et l'on voit aisément que O^1_{k+1}, O^1_k, O^1_{k-1}, ... forment des sous-groupes successifs; de même, si

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{j-1} = 0$$

et $m_j \neq 0$, M appartient à l'espace $O(j, j+1, \ldots, k+1)$ ou O^j_{k+1} et O^1_{k+1}, O^2_{k+1}, O^3_{k+1}, ... forment également des sous-groupes successifs.

Lorsque

$$m_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_{k+1} = 0,$$

on dit que le point géométrique M est rejeté à l'infini; en d'autres termes, qu'il appartient à un sous-groupe Ω^1_{k+1} (plan de l'infini) de O^1_{k+1} défini précisément par la condition

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{k+1} = 0.$$

Chacun des sous-groupes O^1_{k-i} et O^j_{k+1} possède également des sous-groupes ou plans de l'infini Ω^1_{k-i}, Ω^j_{k+1} qui sont aussi des sous-groupes de Ω^1_{k+1} comme il est facile de le vérifier.

D'une manière générale, admettons qu'il existe h relations linéaires indépendantes ($h < k+1$) entre les coordonnées $m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}$,

$$\begin{aligned}
f_1 &= q^1_1 m_1 + q^1_2 m_2 + \ldots + q^1_{k+1} m_{k+1} = 0,\\
f_2 &= q^2_1 m_1 + q^2_2 m_2 + \ldots + q^2_{k+1} m_{k+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_h &= q^h_1 m_1 + q^h_2 m_2 + \ldots + q^h_{k+1} m_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

Les déterminants d'ordre h extraits de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} q^1_1 & q^1_2 & \cdots & q^1_{k+1} \\ q^2_1 & q^2_2 & \cdots & q^2_{k+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ q^h_1 & q^h_2 & \cdots & q^h_{k+1} \end{matrix} \right\|$$

ne sont pas tous nuls, car sinon les relations données ne seraient pas indépendantes.

Dans ces conditions, les h relations définissent un espace à $k-h$ dimensions, sous-groupe de O^1_{k+1} ainsi que des espaces définis par $h-i$ de ces relations.

On peut évidemment remplacer une des relations ci-dessus par une combinaison linéaire

$$\varphi_i = \lambda_i^1 f_1 + \lambda_i^2 f_2 + \ldots + \lambda_i^h f_h = 0.$$

Appelons Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} q_1^1 & q_2^1 & \cdots & q_h^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_h^2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ q_1^h & q_2^h & \cdots & q_h^h \end{vmatrix}$$

que nous supposons $\neq 0$, Δ_j^i le mineur correspondant à l'élément q_j^i, $\Delta(i, j)$ le déterminant Δ dans lequel on remplace les éléments de la $i^{\text{ième}}$ colonne $q_i^1, q_i^2, \ldots, q_i^h$ respectivement par $q_j^1, q_j^2, \ldots, q_j^h$, il viendra, en posant $\lambda_j^i = \Delta_j^i$,

$$\begin{aligned} \varphi_1 = {} & \Delta m_1 + \Delta(1, h+1) m_{h+1} \\ & + \Delta(1, h+2) m_{h+2} + \ldots + \Delta(1, k+1) m_{k+1} = 0, \\ \varphi_2 = {} & \Delta m_2 + \Delta(2, h+1) m_{h+1} \\ & + \Delta(2, h+2) m_{h+2} + \ldots + \Delta(2, k+1) m_{k+1} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_h = {} & \Delta m_h + \Delta(h, h+1) m_{h+1} \\ & + \Delta(h, h+2) m_{h+2} + \ldots + \Delta(h, k+1) m_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

dont la matrice est

$$\left\| \begin{matrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 & q_{h+1}^1 & q_{h+2}^1 & \cdots & q_{k+1}^1 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 & q_{h+1}^2 & q_{h+2}^2 & \cdots & q_{k+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta & q_{h+1}^h & q_{h+2}^h & \cdots & q_{k+1}^h \end{matrix} \right\|.$$

On dira que les relations et la matrice ont été mises sous la première forme canonique.

On admettra comme seconde forme canonique de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} q_1^1 & q_2^1 & \dots & q_{k+1-h}^1 & \Delta & 0 & \dots & 0 \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_{k+1-h}^2 & 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & . & . & \dots & . \\ q_1^h & q_2^h & \dots & q_{k+1\ h}^h & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{matrix} \right\|.$$

Espace défini par de nouveaux pôles. — Il est clair qu'on aurait pu choisir dans O_{k+1}^1, $k+1$ autres points comme pôles de référence; on aurait ainsi déterminé des sous-groupes successifs, transformés par homographie de ceux qui ont été définis précédemment.

D'une manière générale, considérons h points de O_{k+1}^1 $(h \leqq k+1)$,

$$\begin{aligned} m_0^1 M_1 &= m_1^1 O_1 + m_2^1 O_2 + \dots + m_{k+1}^1 O_{k+1}, \\ m_0^2 M_2 &= m_1^2 O_1 + m_2^2 O_2 + \dots + m_{k+1}^2 O_{k+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ m_0^h M_h &= m_1^h O_1 + m_2^h O_2 + \dots + m_{k+1}^h O_{k+1} \end{aligned}$$

avec les conditions

$$m_0^i = m_1^i + m_2^i + \dots + m_{k+1}^i.$$

Si tous les déterminants d'ordre h extraits de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} m_1^1 & m_2^1 & \dots & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_{k+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ m_1^h & m_2^h & \dots & m_{k+1}^h \end{matrix} \right\|$$

ne sont pas tous nuls, nous dirons que ces h points définissent un espace à $h-1$ dimensions $M(1, 2, \dots, h)$

ou M_h^1 avec la formule fondamentale symbolique

$$p_0^i N_i = p_1^i M_1 + p_2^i M_2 + \ldots + p_h^i M_h$$

et

$$p_0^i = p_1^i + p_2^i + \ldots + p_h^i.$$

Nous pourrons définir ainsi h points $N_1, N_2, \ldots, N_h$ et un espace $N(1, 2, \ldots, h)$ ou N_h^1 qui sera le transformé de M_h^1.

Nous supposerons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \cdots & p_h^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \cdots & p_h^2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ p_1^h & p_2^h & \cdots & p_h^h \end{vmatrix} \neq 0,$$

afin de pouvoir exprimer réciproquement M_i en fonction de N_j et en appelant Δ_j^i le mineur correspondant à p_j^i, il viendra

$$\Delta M_i = p_0^1 \Delta_i^1 N_1 + p_0^2 \Delta_i^2 N_2 + \ldots + p_0^h \Delta_i^h N_h$$

avec

$$p_0^1 \Delta_i^1 + p_0^2 \Delta_i^2 + \ldots + p_0^h \Delta_i^h = \Delta,$$

ce qui montre que la relation ci-dessus est bien une définition de coordonnée barycentrique.

On aura également, en remplaçant $M_1, M_2, \ldots, M_h$ par leur valeur,

$$p_0^i N_i = \sum \left(p_1^i \frac{m_j^1}{m_0^1} + p_2^i \frac{m_j^2}{m_0^2} + \ldots + p_h^i \frac{m_j^h}{m_0^h} \right) O_j = \Sigma n_j^i O_j.$$

La somme des coefficients

$$n_1^i + n_2^i + \ldots + n_{k+1}^i$$

est égale à

$$\Sigma p_1^i \frac{\Sigma m_j^1}{m_0^1} = \Sigma p_1^i = p_0^i,$$

de sorte que nous avons bien une définition de coordonnée barycentrique.

On dira que l'espace $N(1, 2, \ldots, h)$ ou N_h^1 est mis sous la première forme canonique lorsque la matrice des coefficients n_j^i sera

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & n_{h+1}^1 & n_{h+2}^1 & \ldots & n_{k+1}^1 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & n_{h+1}^2 & n_{h+2}^2 & \ldots & n_{k+1}^2 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & n_{h+1}^h & n_{h+2}^h & \ldots & n_{k+1}^h \end{matrix} \right\|.$$

Si le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & \ldots & m_h^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \ldots & m_h^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1^h & m_2^h & \ldots & m_h^h \end{vmatrix} \neq 0,$$

il est toujours possible de déduire de M_h^1 un espace canonique N_h^1. Appelons comme précédemment δ_j^i le mineur de δ correspondant à l'élément m_j^i et $\delta(i, j)$ la valeur que prend δ lorsqu'on remplace les éléments de la $i^{\text{ième}}$ colonne $m_i^1, m_i^2, \ldots, m_i^h$ respectivement par $m_j^1, m_j^2, \ldots, m_j^h$, on aura, en multipliant par $\delta_i^1, \delta_i^2, \ldots, \delta_i^h$ et en ajoutant,

$$\begin{aligned} n_0^i N_i &= m_0^1 \delta_i^1 M_1 + m_0^2 \delta_i^2 M_2 + \ldots + m_0^h \delta_i^h M_h \\ &= \delta O_i + \delta(i, h+1) O_{h+1} \\ &\quad + \delta(i, h+2) O_{h+2} + \ldots + \delta(i, k+1) O_{k+1} \end{aligned}$$

avec

$$n_0^i = \Sigma m_0^j \delta_i^j = \Sigma \delta(i, j).$$

Somme algébrique de points-masse. — La notation du point-masse $m_0 M$ tombant en défaut lorsque la masse est nulle, nous désignerons pour simplifier par $a_k^1, b_k^1, c_k^1, \ldots$ des points de masse non nulle situés dans l'espace à k dimensions O_{k+1}^1 et par $\alpha_k^1, \beta_k^1, \gamma_k^1, \ldots$

des points de masse nulle appartenant au plan de l'infini Ω^1_{k+1} et n'ayant en conséquence que k coordonnées indépendantes.

Par définition, la somme algébrique de plusieurs points-masse est un point-masse dont les coordonnées sont les sommes algébriques des coordonnées correspondantes des points-masse composants. Il est évident que, si les coordonnées de points-masse donnés satisfont à une ou plusieurs relations linéaires, toute combinaison linéaire de ces points satisfait également à ces relations; en particulier, toute combinaison linéaire des α^1_k, β^1_k, γ^1_k, ... appartient aussi à Ω^1_{k+1}.

Un point-masse peut toujours être considéré comme la différence de deux points-masse dont un est donné *a priori;* lorsque le point a une masse nulle, il est clair qu'il est la différence de deux points ayant même masse et qu'on peut le mettre sous la forme

$$m(\mathrm{M}-\mathrm{N}) \qquad \text{ou} \qquad m(\mathrm{P}-\mathrm{M}),$$

m et M étant donnés *a priori;* on appelle souvent improprement *vecteur libre* le point de masse nulle; il est préférable de l'appeler *différence* ou *couple de points* ou plus simplement *couple.*

Composition des couples. — Pour composer plusieurs couples on peut :

1° Donner à tous les couples le même point initial (ou final); le second point du couple résultant sera le résultant des seconds points des couples composants

$$\begin{aligned} &m_1(\mathrm{M}-\mathrm{M}_1)+m_2(\mathrm{M}-\mathrm{M}_2)+m_3(\mathrm{M}-\mathrm{M}_3)+\ldots \\ &\quad = \Sigma\, m_i(\mathrm{M}-\mathrm{N}) \end{aligned}$$

si

$$m_1\mathrm{M}_1+m_2\mathrm{M}_2+m_3\mathrm{M}_3+\ldots=\Sigma\, m_i\mathrm{N};$$

2° Donner à tous les points des couples la même masse absolue $\pm m$ et choisir comme premier point d'un couple, le deuxième point du couple précédent

$$m(M-N)+m(N-P)+m(P-Q)=m(M-Q),$$

c'est la composition bien connue des vecteurs libres. Soit un couple

$$\alpha_k^1 = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \ldots + m_{k+1} O_{k+1}$$

avec

$$\Sigma m_i = 0;$$

P étant un point géométrique quelconque, on aura

$$0 = m_1 P + m_2 P + \ldots + m_{k+1} P,$$

d'où

$$\alpha_k^1 = m_1(O_1 - P) + m_2(O_2 - P) + \ldots + m_{k+1}(O_{k+1} - P),$$

en particulier si $P = O_i$, α_k^1 sera exprimé en fonction des k couples $O_j - O_i$.

Expression générale d'un couple. — Considérons deux points de masse non nulle

$$m_0 M = m_1 O_1 + m_2 O_2 + \ldots + m_{k+1} O_{k+1},$$
$$n_0 N = n_1 O_1 + n_2 O_2 + \ldots + n_{k+1} O_{k+1}.$$

Par combinaison linéaire on obtient la formule fondamentale

$$m_0 n_0 (M-N) = \alpha_k^1 = \Sigma \begin{vmatrix} m_i & m_0 \\ n_i & n_0 \end{vmatrix} O_i$$
$$= \Sigma \begin{vmatrix} m_i & m_j \\ n_i & n_j \end{vmatrix} (O_i - O_j) = \Sigma\, \delta_{ij}(O_i - O_j),$$

δ_{ij} étant un déterminant quelconque extrait de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} m_1 & m_2 & \ldots & m_{k+1} \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_{k+1} \end{matrix} \right\|.$$

Pour $k = 1$, on a

$$\alpha_1^1 = (m_1 n_2 - m_2 n_1)(O_1 - O_2)$$

ou

$$\frac{m_0 n_0 (M - N)}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{m_0 (M - O_2)}{m_1} = (O_1 - O_2),$$

ce qui permet d'établir la relation

$$(M - N)(O_1 - O_2) = (M - O_1)(N - O_2) - (M - O_2)(N - O_1).$$

Pour $k = 2$, il vient

$$\alpha_2^1 = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ O_2 - O_3 & O_3 - O_1 & O_1 - O_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_{23} & \delta_{31} & \delta_{12} \\ O_1 & O_2 & O_3 \end{vmatrix}.$$

Pour $k = 3$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_3^1 &= \delta_{12}(O_1 - O_2) + \delta_{13}(O_1 - O_3) + \delta_{14}(O_1 - O_4) \\ &\quad + \delta_{23}(O_2 - O_3) + \delta_{34}(O_3 - O_4) + \delta_{42}(O_4 - O_2) \\ &= \Sigma(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14}) O_1. \end{aligned}$$

Ces deux dernières formules donnent la décomposition d'un vecteur suivant les trois côtés d'un triangle de référence dans le plan ordinaire ou suivant les six arêtes d'un tétraèdre de référence dans l'espace ordinaire.

Points dérivés. — Lorsque les coordonnées d'un point-masse $m_0 M$ sont des fonctions dérivables d'une ou plusieurs variables on peut dire par définition que les dérivées successives de ces coordonnées représentent des points qui sont les dérivés successifs de $m_0 M$; ces points dérivés forment des ensembles ou des multiplicités suivant le nombre et la nature des variables ou paramètres.

En particulier, si les coordonnées de $m_0 M$ sont des

polynomes entiers en t de degré n, il est clair que, lorsque t varie, M décrit une courbe de degré n; les dérivés successifs $M', M'', M''', \ldots$ décrivent des courbes dont le degré va en diminuant de telle sorte que M^{n-2} décrit une conique, M^{n-1} une droite et M^n reste fixe.

Principe du calcul symbolique. — On a examiné précédemment les diverses combinaisons linéaires qu'on peut obtenir avec les pôles de référence

$$O_1, \quad O_2, \quad \ldots, \quad O_{k+1}.$$

Pour étudier les combinaisons d'un degré plus élevé, on appliquera aux coefficients ou masses les règles du calcul algébrique ordinaire et aux pôles $O_1, O_2, \ldots, O_{k+1}$ les règles d'un calcul symbolique fondé sur le postulat suivant :

$$O_i O_j = - O_j O_i,$$

d'où

$$O_i O_i = 0.$$

Cette convention constitue en somme la définition même des éléments géométriques doués de sens et les applications qui en découlent présentent la plus grande analogie avec le calcul des déterminants et des matrices.

Produit symbolique de points de masse non nulle. — Considérons h points de masse non nulle

$$\begin{aligned}
m_0^1 M_1 &= m_1^1 O_1 + m_2^1 O_2 + \ldots + m_{k+1}^1 O_{k+1}, \\
m_0^2 M_2 &= m_1^2 O_1 + m_2^2 O_2 + \ldots + m_{k+1}^2 O_{k+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_0^h M_h &= m_1^h O_1 + m_2^h O_2 + \ldots + m_{k+1}^h O_{k+1};
\end{aligned}$$

en multipliant et en tenant compte des conventions admises, on obtient l'expression de l'élément-masse de

degré h

$$a_k^h = m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^h \mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2 \ldots \mathrm{M}_h = \Sigma\, \delta_{i_1 i_2 \ldots i_h} \mathrm{O}_{i_1} \mathrm{O}_{i_2} \ldots \mathrm{O}_{i_h},$$

$\delta_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ étant un déterminant quelconque extrait de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} m_1^1 & m_2^1 & \ldots & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \ldots & m_{k+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ m_1^h & m_2^h & \ldots & m_{k+1}^h \end{matrix} \right\|.$$

Ces déterminants ne sont pas tous nuls, sinon il y aurait une relation linéaire entre les points donnés, ce que nous ne supposons pas; on peut donc admettre que $\delta_{12\ldots h} \neq 0$, car, dans le cas contraire, il suffirait d'effectuer une permutation de colonnes. Considérons h points quelconques de l'espace $\mathrm{M}(1.2\ldots h)$

$$\begin{aligned} n_0^1 \mathrm{N}_1 &= n_1^1 \mathrm{M}_1 + n_2^1 \mathrm{M}_2 + \ldots + n_h^1 \mathrm{M}_h, \\ n_0^2 \mathrm{N}_2 &= n_1^2 \mathrm{M}_1 + n_2^2 \mathrm{M}_2 + \ldots + n_h^2 \mathrm{M}_h, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n_0^h \mathrm{N}_h &= n_1^h \mathrm{M}_1 + n_2^h \mathrm{M}_2 + \ldots + n_h^h \mathrm{M}_h; \end{aligned}$$

d'où en multipliant

$$\begin{aligned} n_0^1 n_0^2 \ldots n_0^h \mathrm{N}_1 \mathrm{N}_2 \ldots \mathrm{N}_h &= \begin{vmatrix} n_1^1 & n_2^1 & \ldots & n_h^1 \\ n_1^h & n_2^h & \ldots & n_h^h \end{vmatrix} \mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2 \ldots \mathrm{M}_h \\ &= \Delta \mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2 \ldots \mathrm{M}_h, \end{aligned}$$

il suffira donc de poser

$$n_0^1 n_0^2 \ldots n_0^h = \Delta m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^h$$

pour avoir

$$n_0^1 n_0^2 \ldots n_0^h \mathrm{N}_1 \mathrm{N}_2 \ldots \mathrm{N}_h = m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^h \mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2 \ldots \mathrm{M}_h.$$

Cela signifie qu'on peut transformer homographiquement l'élément géométrique donné d'une manière quelconque dans l'espace géométrique défini par cet

élément à la condition de déterminer en conséquence la masse correspondante; ainsi un segment peut être remplacé par un segment quelconque de la droite servant de support, un triangle par un triangle quelconque contenu dans le même plan, etc.

Les coordonnées contenues dans le produit

$$m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^h M_1 \ldots M_h$$

sont au nombre de $h(k+1)$; nous avons vu, d'autre part, qu'on peut introduire h^2 indéterminées n_j^i à la condition de les lier par une relation : il en résulte que les coordonnées vraiment indépendantes d'un élément-masse a_k^h sont au nombre de

$$h(k+1) - h^2 + 1 = h(k+1-h) + 1.$$

En d'autres termes, on peut profiter des h^2 indéterminées n_j^i pour réduire l'élément et sa matrice à la forme canonique

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & p_{h+1}^1 & \ldots & p_{k+1}^1 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & p_{h+1}^2 & \ldots & p_{k+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & p_{h+1}^h & \ldots & p_{k+1}^n \end{matrix} \right\|$$

dans laquelle le nombre des coordonnées indépendantes est visiblement de $h(k+1-h)+1$; on voit aussi par cette expression que les éléments de degré h et de degré $k+1-h$ (que nous appellerons *complémentaires*) ont le même nombre de coordonnées indépendantes.

Toute combinaison linéaire d'éléments-masse a_k^h s'obtient aisément en effectuant la combinaison linéaire correspondante sur les coefficients $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_h}$; toutefois, à l'encontre de ce qui se passe pour les points-masse, on n'obtient pas en général un élément-masse de même

degré, mais bien une expression de la forme

$$\Sigma m_{i_1 i_2 \ldots i_h} O_{i_1} O_{i_2} \ldots O_{i_h},$$

dans laquelle les coefficients $m_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ peuvent être considérés comme des coordonnées indépendantes.

Le nombre de ces coordonnées est

$$C_{k+1}^{h} = \frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k+2-h)}{1.2.3\ldots h} = \frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)!}.$$

Ce nombre est évidemment le même pour des éléments ayant des degrés complémentaires.

Ces considérations permettent de déterminer d'une manière tout à fait élémentaire le nombre minimum $\mathfrak{N}$ d'éléments-masse de degré h auxquels une combinaison linéaire quelconque de ces éléments peut être ramenée : il est clair que ce nombre $\mathfrak{N}$ est le quotient par excès de la fraction

$$\frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)![h(k+1-h)+1]}$$

et la différence

$$\mathfrak{N}[h(k+1-h)+1] - \frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)!}$$

représente le nombre de conditions supplémentaires qu'on peut imposer à ce système réduit de $\mathfrak{N}$ éléments.

Prenons le cas classique des segments-masse $m_0 n_0 MN$ dans l'espace à trois dimensions $h = 2$, $k = 3$.

On trouve aisément $\mathfrak{N} = 2$ avec $2 \times 5 - 6 = 4$ conditions supplémentaires.

On sait en effet qu'un système linéaire quelconque de segments-masse ou forces peut être ramené à deux segments-masse, l'un passant par un point donné O, l'autre contenu dans un plan donné π (en tout 4 conditions).

Par le point O et chacun des segments M_iN_i on mène un plan qui coupe π suivant une droite A_i et l'on peut décomposer le segment-masse M_iN_i en deux segments-masse, l'un passant par O, l'autre porté par A_i : chacun de ces groupes a une résultante, l'une qui passe par O, l'autre contenue dans π.

Il n'y a d'exception à ce raisonnement que lorsque M_iN_i est parallèle à π, auquel cas le segment est porté par la droite de l'infini de π : la résultante peut être alors soit dans un plan parallèle à π, soit entièrement rejetée à l'infini sur ce plan.

Lorsque k est très grand, on peut dire que $\mathfrak{N}$ tend asymptotiquement vers sa valeur principale

$$\frac{k^{h-1}}{h!\,h}$$

soit

$$\frac{k}{4} \quad \text{et} \quad \frac{k^2}{18}$$

pour les éléments-masse des deuxième et troisième degrés.

$k+1$ étant donné, le maximum de $\mathfrak{N}$ a lieu lorsque h est aussi voisin que possible de $\frac{k+1}{2}$, d'où

$$\mathfrak{N} = \frac{(k+1)!}{\left[\left(\frac{k+1}{2}\right)!\right]^2\left[\left(\frac{k+1}{2}\right)^2+1\right]}$$

et lorsque h devient très grand la valeur asymptotique de $\mathfrak{N}$ est, d'après les propriétés de l'intégrale eulérienne,

$$\mathfrak{N} \sim \frac{2^{k+\frac{7}{2}}}{\sqrt{\pi}(k+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Lorsque $h = k+1$ le produit de $k+1$ points-masse est nécessairement de la forme $a_k^{k+1} = m\,O_1O_2\ldots O_{k+1}$,

de sorte que l'élément géométrique peut être sous-entendu et un pareil produit est en tous points comparable à un nombre algébrique m.

Au delà de $k+1$ facteurs le produit est toujours nul, car il se trouve nécessairement dans chaque produit partiel $O_i O_i = 0$, donc $a_k^{k+i} = 0$ pour $i > 1$.

Le produit de deux éléments de degrés complémentaires $a_h^k b_k^{k+1-h}$ est un élément c_k^{k+1} qui se comporte dans les combinaisons linéaires comme un nombre algébrique.

Produit symbolique de couples. — Avant d'étudier le produit symbolique obtenu en multipliant des points de masse nulle α_k^1, il y a lieu d'établir une formule préliminaire. Posons

$$(M_1 - M_{h+1})(M_2 - M_{h+1}) \ldots (M_h - M_{h+1}) = \alpha_k^h,$$

$$(M_1 - P)(M_2 - P) \ldots (M_h - P) = \beta_k^h,$$

$$\begin{aligned} \beta_k^2 &= (M_1 - P)(M_2 - P) \\ &= M_1 M_2 - (M_1 - M_2) P = M_1 M_2 - \alpha_k^1 P. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que, si l'on a

$$\beta_k^h = M_1 M_2 \ldots M_h - \alpha_k^{h-1} P,$$

on aura également

$$\beta_k^{h+1} = M_1 M_2 \ldots M_{h+1} - \alpha_k^h P.$$

En effet, en remplaçant dans β_k^h, P par M_{h+1}, on obtient α_k^h, d'où

$$\alpha_k^h = M_1 M_2 \ldots M_h - \alpha_k^{h-1} M_{h+1};$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \beta_k^{h+1} &= \beta_k^h (M_{h+1} - P) = (M_1 M_2 \ldots M_h - \alpha_k^{h-1} P)(M_{h+1} - P) \\ &= M_1 M_2 \ldots M_{h+1} - (M_1 M_2 \ldots M_h - \alpha_k^{h-1} M_{h+1}) P \\ &= M_1 M_2 \ldots M_{h+1} - \alpha_k^h P. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

On peut écrire comme il suit h points de masse nulle, P étant arbitrairement choisi et $m = m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^{h+j} \neq 0$,

$$\begin{aligned}
m_0^1(M_1 - P) &= m_1^1(O_1 - P) + m_2^1(O_2 - P) + \ldots \\
&\quad + m_{k+1}^1(O_{k+1} - P), \\
m_0^2(M_2 - P) &= m_1^2(O_1 - P) + m_2^2(O_2 - P) + \ldots \\
&\quad + m_{k+1}^2(O_{k+1} - P), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_0^h(M_h - P) &= m_1^h(O_1 - P) + m_2^h(O_2 - P) + \ldots \\
&\quad + m_{k+1}^h(O_{k+1} - P),
\end{aligned}$$

et au-dessous j points de masse non nulle

$$\begin{aligned}
m_0^{h+1} M_{h+1} &= m_1^{h+1} O_1 + m_2^{h+1} O_2 + \ldots + m_{k+1}^{h+1} O_{k+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_0^{h+j} M_{h+j} &= m_1^{h+j} O_1 + m_2^{h+j} O_2 + \ldots + m_{k+1}^{h+j} O_{k+1}.
\end{aligned}$$

En multipliant, il viendra

$$\begin{aligned}
&m(M_1 - P)(M_2 - P)\ldots(M_h - P)M_{h+1}\ldots M_{h+j} \\
&\quad = m(M_1 M_2 \ldots M_h - \alpha_k^{h-1} P) M_{h+1} \ldots M_{h+j} \\
&\quad = m(M_1 M_2 \ldots M_{h+j} - \alpha_k^{h-1} P M_{h+1} \ldots M_{h+j}) \\
&\quad = \Sigma\, \delta_{i_1 i_2 \ldots i_{h+j}} (O_{i_1} - P)(O_{i_2} - P)\ldots(O_{i_h} - P) O_{i_{h+1}} \ldots O_{i_{h+j}} \\
&\quad = \Sigma\, \delta_{i_1 i_2 \ldots i_{h+j}} (O_{i_1} O_{i_2} \ldots O_{i_h} - \gamma_k^{h-1} P) O_{i_{h+1}} \ldots O_{i_{h+j}} \\
&\quad = \Sigma\, \delta_{i_1 i_2 \ldots i_{h+j}} (O_{i_1} O_{i_2} \ldots O_{i_{h+j}} - \gamma_k^{h-1} P O_{i_{h+1}} \ldots O_{i_{h+j}}).
\end{aligned}$$

Mais on a démontré précédemment que

$$m M_1 M_2 \ldots M_{h+j} = \Sigma\, \delta_{i_1 i_2 \ldots i_{h+j}} O_{i_1} O_{i_2} \ldots O_{i_{h+j}};$$

dès lors, il reste, en supprimant le facteur commun P,

$$m \alpha_k^{h-1} M_{h+1} \ldots M_{h+j} = \Sigma\, \delta_{i_1 i_2 \ldots i_{h+j}} \gamma_k^{h-1} O_{i_{h+1}} \ldots O_{i_{h+j}},$$

ce qui constitue la formule fondamentale pour le calcul des éléments formés par le produit de points de masse nulle.

On a en particulier les formules suivantes :

$$m_0^1 m_0^2 M_1 M_2 = \Sigma\, \delta_{ij} O_i O_j,$$
$$m_0^1 m_0^2 (M_1 - M_2) = \Sigma\, \delta_{ij} (O_i - O_j),$$
$$m_0^1 m_0^2 m_0^3 M_1 M_2 M_3 = \Sigma\, \delta_{ijh} O_i O_j O_h,$$
$$m_0^1 m_0^2 m_0^3 (M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1)$$
$$= \Sigma\, \delta_{ijh} (O_i O_j + O_j O_h + O_h O_i),$$
$$m_0^1 m_0^2 m_0^3 m_0^4 M_1 M_2 M_3 M_4 = \Sigma\, \delta_{ijhl} O_i O_j O_h O_l,$$
$$m_0^1 m_0^2 m_0^3 m_0^4 [M_1 M_2 M_3 - (M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1) M_4]$$
$$= \Sigma\, \delta_{ijhl} (O_i O_j O_h - [O_i O_j + O_j O_h + O_h O_i) O_l],$$

δ_{ij}, δ_{ijh}, δ_{ijhl} étant les déterminants extraits des matrices formées avec les coefficients des points composants.

Remarquons que le produit des h points de masse nulle α_k^1 par un point de masse non nulle mM est un produit de $h+1$ points de masse non nulle, car dans l'expression de $\alpha_k^1 = m_0^i (M_i - P)$ il suffit de prendre $P = M$ pour que le produit soit visiblement

$$m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^h m M_1 M_2 \ldots M_h M.$$

Rappelons enfin que les éléments α_k^h, β_k^h, ... sont contenus dans Ω_{k+1}^1, c'est-à-dire dans un espace à $k-1$ dimensions : dès lors, pour connaître le nombre minimum d'éléments $\mathfrak{N}$ auxquels un système linéaire quelconque de ces éléments peut être ramené, il suffit de changer k en $k-1$ dans les formules établies plus haut.

Applications géométriques. — On a établi la formule

$$\frac{M_1 O_2 O_3 \ldots O_{k+1}}{O_1 O_2 O_3 \ldots O_{k+1}} = \frac{m_i^1}{m_0^1},$$

c'est la définition habituelle des coordonnées barycen-

triques (surface du triangle $M_1O_2O_3$ dans le plan ordinaire, volume du tétraèdre $M_1O_2O_3O_4$ dans l'espace ordinaire).

En utilisant la définition $m_0^1 = \Sigma m_i^1$, on a

$$O_1O_2\ldots O_{k+1} = M_1O_2O_3\ldots O_{k+1} + O_1M_1O_3\ldots O_{k+1} + \ldots + O_1O_2\ldots O_kM_1,$$

et il est aisé de voir que cette formule subsiste pour $k+2$ points quelconques.

En considérant deux points M_1, M_2, on a établi la relation

$$\frac{M_1M_2O_3O_4\ldots O_{k+1}}{O_1O_2O_3O_4\ldots O_{k+1}} = \frac{(M_1 - M_2)O_3O_4\ldots O_{k+1}}{(O_1 - O_2)O_3O_4\ldots O_{k+1}} = \frac{\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{vmatrix}}{m_0^1 m_0^2},$$

d'où en utilisant la formule précédente

$$M_1M_2O_3\ldots O_{k+1} - O_1O_2O_3\ldots O_{k+1} = \begin{vmatrix} M_1O_2O_3\ldots O_{k+1} & O_1M_1O_3\ldots O_{k+1} \\ M_2O_2O_3\ldots O_{k+1} & O_1M_2O_3\ldots O_{k+1} \end{vmatrix}.$$

Si $k = 1$, M_1 et M_2 sont situés sur O_1O_2 et l'on a

$$M_1M_2 . O_1O_2 = M_1O_1 . M_2O_2 - M_1O_2 . M_2O_1.$$

Avec trois points M_1, M_2, M_3, on a la relation

$$\frac{M_1M_2M_3O_4\ldots O_{k+1}}{O_1O_2O_3O_4\ldots O_{k+1}} = \frac{(M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_1)O_4\ldots O_{k+1}}{(O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_1)O_4\ldots O_{k+1}} = \frac{\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{vmatrix}}{m_0^1 m_0^2 m_0^3},$$

d'où l'on tire

$$M_1 M_2 M_3 O_4 \ldots O_{k+1} . (O_1 O_2 \ldots O_{k+1})^2$$

$$= \begin{vmatrix} M_1 O_2 \ldots O_{k+1} & O_1 M_1 O_3 \ldots O_{k+1} & O_1 O_2 M_1 O_4 \ldots O_{k+1} \\ M_2 O_2 \ldots O_{k+1} & O_1 M_2 O_3 \ldots O_{k+1} & O_1 O_2 M_2 O_4 \ldots O_{k+1} \\ M_3 O_2 \ldots O_{k+1} & O_1 M_3 O_3 \ldots O_{k+1} & O_1 O_2 M_3 O_4 \ldots O_{k+1} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} & M_1 M_2 M_3 O_4 \ldots O_{k+1} . O_1 O_2 \ldots O_{k+1} \\ & \quad = M_1 M_2 O_3 \ldots O_{k+1} . O_1 O_2 M_3 O_4 \ldots O_{k+1} \\ & \qquad + M_2 M_3 O_3 \ldots O_{k+1} . O_1 O_2 M_1 O_4 \ldots O_{k+1} \\ & \qquad + M_3 M_1 O_3 \ldots O_{k+1} . O_1 O_2 M_2 O_4 \ldots O_{k+1} \\ & \quad = M_1 M_2 O_3 \ldots O_{k+1} . O_1 O_2 M_3 O_4 \ldots O_{k+1} \\ & \qquad + O_1 M_1 M_2 O_4 \ldots O_{k+1} . M_3 O_2 O_3 \ldots O_{k+1} \\ & \qquad + M_2 O_2 M_1 O_4 \ldots O_{k+1} . O_1 M_3 O_3 \ldots O_{k+1}. \end{aligned}$$

Si M_1, M_2, M_3 sont en ligne droite, on a nécessairement

$$M_1 M_2 M_3 = 0$$

et

$$M_1 M_2 + M_2 M_3 - M_3 M_1 = 0,$$

et cette dernière relation subsiste quel que soit l'espace O^1_{k+1}.

Avec quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, on a

$$\frac{M_1 M_2 M_3 M_4 O_5 \ldots O_{k+1}}{O_1 O_2 O_3 \ldots O_{k+1}}$$

$$= \frac{[M_1 M_2 M_3 - (M_1 M_2 - M_2 M_3 + M_3 M_1) M_4] O_5 \ldots O_{k+1}}{[O_1 O_2 O_3 - (O_1 O_2 - O_2 O_3 + O_3 O_1) O_4] O_5 \ldots O_{k+1}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} m^1_1 & m^1_2 & m^1_3 & m^1_4 \\ m^2_1 & m^2_2 & m^2_3 & m^2_4 \\ m^3_1 & m^3_2 & m^3_3 & m^3_4 \\ m^4_1 & m^4_2 & m^4_3 & m^4_4 \end{vmatrix}}{m^1_0 m^2_0 m^3_0 m^4_0}.$$

d'où l'on peut déduire

$$\begin{aligned} &M_1 M_2 M_3 M_4 O_5 \ldots O_{k+1} . O_1 O_2 O_3 \ldots O_{k+1} \\ &\quad = \Sigma M_1 O_2 O_3 \ldots O_{k+1} . O_1 M_2 M_3 M_4 O_5 \ldots O_{k+1} \\ &\quad = \Sigma M_1 M_2 O_3 O_4 \ldots O_{k+1} . O_1 O_2 M_3 M_4 O_5 \ldots O_{k+1}. \end{aligned}$$

Lorsque M_1, M_2, M_3, M_4 sont situés dans un même plan O_3^1, on a

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = 0$$

et

$$M_1 M_2 M_3 - M_1 M_2 M_4 - M_2 M_3 M_4 - M_3 M_1 M_4 = 0,$$

et cette dernière relation subsiste quel que soit l'espace considéré O_{k+1}^1.

Rappelons la formule générale

$$m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^h M_1 M_2 \ldots M_h = \Sigma \delta_{i_1 i_2 i_h} O_{i_1} O_{i_2} O_{i_h},$$

$\delta_{i_1 i_2 i_h}$ étant un déterminant extrait de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} m_1^1 & m_2^1 & \ldots & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \ldots & m_{k+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1^h & m_2^h & \ldots & m_{k+1}^h \end{matrix} \right\|.$$

Si $h = k$, on aura

$$\begin{aligned} &m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^k M_1 M_2 \ldots M_k \\ &= \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_{k+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1^k & m_2^k & m_{k+1}^k \\ O_2 O_3 \ldots O_{k+1} & O_1 O_3 \ldots O_{k+1} & O_1 O_2 \ldots O_k \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Appelons

$$p_1 O_1 + p_2 O_2 + \ldots + p_{k+1} O_{k+1} = P(O_i) = 0$$

l'équation du plan général contenant $M_1 M_2 \ldots M_k$ et

appelons Ω le point géométrique symbolique dont les coordonnées sont

$$O_2 O_3 \ldots O_{k+1}, \quad O_1 O_3 \ldots O_{k+1}, \quad \ldots, \quad O_1 O_2 \ldots O_k,$$

on aura

$$m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^k M_1 M_2 \ldots M_k = \lambda \Sigma p_1 O_2 O_3 \ldots O_{k+1} = \lambda P(\Omega_i).$$

En multipliant par le point $m_0^{k+1} M_{k+1}$, il viendra

$$m_0^1 m_0^2 \ldots m_0^{k+1} \frac{M_1 M_2 \ldots M_{k+1}}{O_1 O_2 \ldots O_{k+1}} = \lambda \Sigma p_1 m_1^{k+1} = \lambda P(m_i^{k+1}),$$

d'où divisant membre à membre

$$\frac{M_1 M_2 \ldots M_{k+1}}{M_1 M_2 \ldots M_k} = \frac{P(m_i^{k+1})}{m_0^{k+1} P(\Omega_i)} O_1 O_2 \ldots O_{k+1}.$$

On peut admettre que $M_1 M_2 \ldots M_{k+1}$ est égal à une constante près μ au produit de l'élément $M_1 M_2 \ldots M_k$ par la distance d_k de M_{k+1} au plan général contenant cet élément, d'où

$$\mu d_k = \frac{P\left(\dfrac{m_i^{k+1}}{m_0^{k+1}}\right)}{P(\Omega_i)} O_1 O_2 \ldots O_{k+1}.$$

En particulier, dans l'espace O_3^1 ou plan ordinaire $k = 2$, on a

$$m_0^1 m_0^2 M_1 M_2 = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ O_2 O_3 & O_3 O_1 & O_1 O_2 \end{vmatrix} = \Sigma \delta_{ij} O_i O_j,$$

$$m_0^1 m_0^2 m_0^3 M_1 M_2 M_3 = (\delta_{23} m_1^3 + \delta_{31} m_2^3 + \delta_{12} m_3^3) O_1 O_2 O_3.$$

Posons, comme il est d'usage,

$$M_1 M_2 M_3 = \frac{M_1 M_2 \times d_2}{2},$$

d_2 étant la perpendiculaire abaissée de M_3 sur $M_1 M_2$

il vient

$$d_2 = \frac{2\,M_1 M_2 M_3}{M_1 M_2} = \frac{2\,\Sigma\,\delta_{23}\,m_1^3}{m_0^3\,\Sigma\,\delta_{23}\,O_2 O_3}\,O_1 O_2 O_3$$

$$= \frac{2\,D\left(\frac{m_1^3}{m_0^3}\right)}{D(O_2 O_3{}_i)}\,O_1 O_2 O_3,$$

$D(m_i) = 0$ étant l'équation de la droite $M_1 M_2$.

De même dans l'espace ordinaire à trois dimensions $k = 3$, on posera

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = \frac{M_1 M_2 M_3 \times d_3}{3},$$

d_3 étant la perpendiculaire abaissée de M_4 sur $M_1 M_2 M_3$, d'où

$$d_3 = \frac{3\,P\left(\frac{m_1^4}{m_0^4}\right)}{P(O_2 O_3 O_4)}\,O_1 O_2 O_3 O_4.$$

$P(m_i) = 0$ étant l'équation du plan $M_1 M_2 M_3$.

Plus généralement, si l'on pose

$$M_1 M_2 \ldots M_{k+1} = M_1 M_2 \ldots M_h$$
$$\times\, M_{h+1} M_{h+2} \ldots M_{k+1} \times d_{h,k+1-h},$$

la multiplication du second membre étant algébrique et non symbolique, on pourra, à un facteur numérique près, appeler $d_{h,k+1-h}$ la plus courte distance des éléments $M_1 M_2 \ldots M_h$, $M_{h+1} M_{h+2} \ldots M_{k+1}$ et il sera facile de la calculer.

En particulier, dans l'espace ordinaire O_4^1, on posera comme d'usage

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = M_1 M_2 \times M_3 M_4 \times d_{2,2},$$

$d_{2,2}$ étant la plus courte distance des droites $M_1 M_2$ et $M_3 M_4$.

Si $\Sigma\,\delta_{ij}^{12}\,O_i O_j = 0$ est l'équation de $M_1 M_2$, on trouve

aisément

$$d_{2,2} = \frac{6\Sigma\,\delta_{ij}^{12}\,\delta_{i'j'}^{34}}{\Sigma\,\delta_{ij}^{12}\,O_i O_j\,\Sigma\,\delta_{i'j'}^{34}\,O_{i'} O_{j'}}\,O_1 O_2 O_3 O_4,$$

i, j, i', j' étant les indices successifs 1, 2, 3, 4 sans omission ni répétition.

Dans la relation

$$m_0^1\,m_0^2\,M_1 M_2 = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ O_2 O_3 & O_3 O_1 & O_1 O_2 \end{vmatrix} = \Sigma\,\delta_{12}\,O_1 O_2$$

posons

$$O_2 O_3 = a_1 e^{i\theta_1}, \qquad M_1 M_2 = \rho\, e^{i\sigma},$$

il viendra

$$m_0^1\,m_0^2\,\rho\, e^{i\sigma} = \Sigma\,\delta_{23}\,a_1 e^{i\theta_1}$$

et en changeant i en $-i$,

$$m_0^1\,m_0^2\,\rho\, e^{-i\sigma} = \Sigma\,\delta_{23}\,a_1 e^{-i\theta_1}.$$

Appelons :

I le point de coordonnées

$$a_1 e^{i\theta_1}, \quad a_2 e^{i\theta_2}, \quad a_3 e^{i\theta_3},$$

J le point de coordonnées

$$a_1 e^{-i\theta_1}, \quad a_2 e^{-i\theta_2}, \quad a_3 e^{-i\theta_3},$$

ce sont les points cycliques du plan.

Il vient en divisant

$$e^{2i\sigma} = \frac{\Sigma\,\delta_{23}\,a_1 e^{i\theta_1}}{\Sigma\,\delta_{23}\,a_1 e^{-i\theta_1}} = \frac{D(J)}{D(I)},$$

$D(m_1) = 0$ étant l'équation de la droite $M_1 M_2$ et

$$\sigma = \frac{1}{2i}\,L\,\frac{D(I)}{D(J)}.$$

Pour une autre droite, on a

$$\sigma' = \frac{1}{2i}\,L\,\frac{D'(I)}{D'(J)}$$

et

$$\sigma - \sigma' = \frac{1}{2i} \mathrm{L} \frac{\mathrm{D}(\mathrm{I})}{\mathrm{D}(\mathrm{J})} \frac{\mathrm{D}'(\mathrm{J})}{\mathrm{D}'(\mathrm{I})},$$

c'est la définition bien connue depuis Laguerre de l'angle de deux droites par le rapport anharmonique qu'elles déterminent avec les points cycliques sur la droite de l'infini.

On voit immédiatement que les segments géométriques portés par une droite passant par I ou J et appelée habituellement *isotrope* ont une longueur nulle, car le déterminant correspondant est nul.

La longueur de $\rho = \mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2$ est obtenue aisément par la formule

$$\begin{aligned}(m_0^1 m_0^2 \rho)^2 &= \Sigma\, \delta_{23} a_1 e^{i\theta_1} \Sigma\, \delta_{23} a_1 e^{-i\theta_1} \\ &= \Sigma (\delta_{23} a_1)^2 + 2 \Sigma\, \delta_{12} \delta_{23} a_3 a_1 \cos(\theta_3 - \theta_1).\end{aligned}$$

Le calcul symbolique des systèmes linéaires. — On appelle *système linéaire* S le tableau formé par $(k+1)^2$ coefficients disposés en carré dans un ordre déterminé et qui peuvent représenter soit les coordonnées barycentriques de $k+1$ points-masse dans O_{k+1}^i,

$$m_0^i \mathrm{M}_i = m_1^i \mathrm{O}_1 + m_2^i \mathrm{O}_2 + \ldots + m_{k+1}^i \mathrm{O}_{k+1},$$

soit la forme bilinéaire

$$\Sigma\, m_j^i u_i v_j,$$

soit la substitution linéaire qui exprime x_i en fonction de y_i,

$$m_0^i x_i = m_1^i y_1 + m_2^i y_2 + \ldots + m_{k+1}^i y_{k+1}$$

ou plus simplement d'une manière symbolique

$$x = \mathrm{S} y.$$

A un tableau peuvent ne correspondre ni point-

masse ni substitution proprement dite, par exemple si tous les éléments d'une ligne sont nuls; le tableau n'en aura pas moins une définition formelle.

On voit, en particulier, qu'un tableau dont tous les éléments sont nuls jouit, au point de vue du calcul symbolique, de toutes les propriétés du nombre zéro.

On dit qu'un système linéaire, qu'une substitution, qu'un tableau sont bien déterminés dans O^1_{k+1} lorsque le déterminant correspondant est différent de zéro.

La combinaison linéaire d'un nombre quelconque de systèmes linéaires A, B, C, ..., soit

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots$$

s'obtient en effectuant ladite combinaison sur les éléments correspondants, ce qui donne l'élément du tableau demandé.

Si l'on a deux substitutions linéaires bien déterminées

$$x = Sy, \qquad y = Tz$$

et si l'on a, en exprimant directement x en fonction de z,

$$x = Uz,$$

on dira que le système U est le produit de S par T et l'on posera

$$U = ST.$$

Cette définition et le procédé formel qui en dérive s'appliqueront même dans le cas où S et T ne seraient pas des substitutions bien déterminées.

Si l'on a une substitution de ce genre

$$x = Sy$$

et qu'on en tire

$$y = S_{-1}x,$$

on dira que S et S_{-1} sont inverses l'une de l'autre et

que leur produit est l'unité

$$SS_{-1} = S_{-1}S = 1,$$

l'unité étant un système composé d'éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale descendante qui sont tous égaux à 1.

En général, $ST \neq TS$; dans le cas où ces produits sont égaux, les substitutions sont dites *permutables*.

Étant donné un système S, on appelle *système associé* S′ celui obtenu en changeant les lignes en colonnes et les colonnes en lignes.

La somme $S + S'$ donne un système symétrique droit D; la différence $S - S'$ un système symétrique gauche G dont tous les éléments de la diagonale principale sont nuls.

On sait [1] qu'un système linéaire S est racine d'une équation algébrique symbolique dont le degré est au plus égal à $k + 1$.

En effet, en appelant

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} m_1^1 - \lambda & m_2^1 & m_3^1 & \dots & m_{k+1}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 - \lambda & m_3^2 & \dots & m_{k+1}^2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ m_1^{k+1} & m_2^{k+1} & m_3^{k+1} & \dots & m_{k+1}^{k+1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation en λ du déterminant correspondant, on a symboliquement

$$F(S) = 0$$

et, selon que $F(\lambda) = 0$ est irréductible ou réductible, $F(S) = 0$ est de degré $k + 1$ ou d'un degré moindre. Plus généralement, si l'on développe le déterminant du système linéaire $\lambda T - \mu S$, on trouve une équation

$$F(\lambda, \mu) = 0$$

---

[1] *Voir* LAGUERRE, *Sur le calcul des systèmes linéaires*, p. 223.

qui est vérifiée symboliquement et l'on a

$$F(S, T) = 0.$$

Les systèmes S, T, U, ... sont également racines d'équations algébriques de degrés $\leqq k + 1$ et il en est de même d'une expression symbolique quelconque de ces systèmes; il y a lieu toutefois de remarquer qu'en général

$$ST \neq TS,$$

mais la somme $ST + TS$ peut être considérée comme un véritable nombre algébrique. On démontrerait qu'il en est de même d'une expression symétrique quelconque des systèmes S, T, U, ...

Il en résulte que finalement l'étude des systèmes linéaires se ramène à celle des nombres algébriques et à la théorie des substitutions dont elle n'est qu'un cas très particulier.

[$O^1 2 q \beta$]

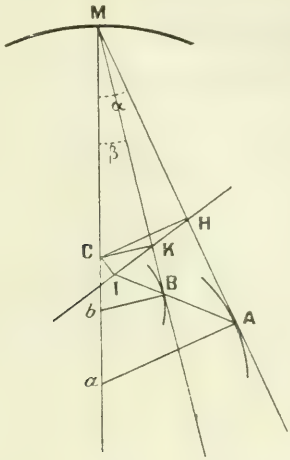
DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME DE CORNU SUR LES CAUSTIQUES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Cornu a donné (*N. A.*, 1863, p. 311) un théorème d'une très grande élégance pour la détermination point par point des caustiques par réfraction, comprenant comme cas particulier celles par réflexion. Ce théorème s'énonce ainsi :

Si le rayon incident MA *et le rayon réfracté* MB,

se coupant au point M *de la courbe dirimante, auquel correspond le centre de courbure* C, *touchent*



respectivement leurs enveloppes aux points A *et* B, *la droite* AB *passe par la projection* I *du centre de courbure* C *sur la droite qui joint les projections* H *et* K *de ce même centre sur les deux rayons.*

Ce théorème semble peu connu, et cela tient peut-être à ce que la voie analytique par laquelle son auteur l'a obtenu manque un peu de simplicité. Nous allons faire voir ici qu'il est très facile de l'établir par un procédé purement géométrique.

Si l'indice de réfraction est n, on a

$$\sin\beta = n \sin\alpha. \tag{1}$$

qui donne immédiatement

$$n = \frac{CK}{CH}. \tag{2}$$

En différentiant (1) on a

$$\cos\beta\, d\beta = n \cos\alpha\, d\alpha,$$

ou, en tenant compte de (2),

$$\mathrm{CH} \cos\beta\, d\beta = \mathrm{CK} \cos\alpha\, d\alpha.$$

Mais le quadrilatère MCKH étant inscriptible, les angles CKI et CHI sont respectivement égaux à α et β, et il vient

$$(3) \qquad \mathrm{IH}\, d\beta = \mathrm{IK}\, d\alpha.$$

Maintenant, si ds est l'arc infiniment petit décrit par le point M, une formule bien connue de Mannheim donne

$$d\alpha = ds\left(\frac{1}{\mathrm{MC}} - \frac{1}{\mathrm{M}a}\right), \qquad d\beta = ds\left(\frac{1}{\mathrm{MC}} - \frac{1}{\mathrm{M}b}\right),$$

a et b étant les points où les normales en A et B aux deux enveloppes coupent la normale MC à la courbe dirimante. On en déduit

$$\frac{a\mathrm{M}}{a\mathrm{C}}\, d\alpha = \frac{b\mathrm{M}}{b\mathrm{C}}\, d\beta$$

ou encore, puisque Aa et Bb sont respectivement parallèles à HC et KC,

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AH}}\, d\alpha = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BK}}\, d\beta.$$

Multipliant (3) et (4) membre à membre, on obtient

$$\frac{\mathrm{AM.BK.IH}}{\mathrm{AH.BM.IK}} = 1,$$

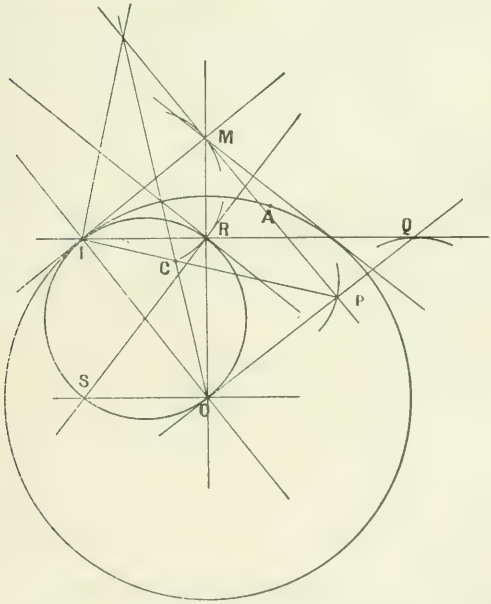
d'où résulte que les points A, B, I, pris sur les côtés du triangle MHK, sont bien en ligne droite.

[M⁴c, e]

SUR UN GROUPE DE COURBES CLASSIQUES;

PAR UN ABONNÉ.

Les courbes en question sont : la *développante de cercle*, la *spirale d'Archimède*, la *spirale hyperbolique* et la *spirale tractrice*. Elles ont entre elles de



nombreuses liaisons que nous nous proposons d'indiquer dans ce qui suit.

Considérons un cercle de centre O et de rayon a,

que, pour abréger le langage, nous appellerons *cercle directeur*. Soient A un point fixe de ce cercle et I un point variable. Sur la tangente en I prenons une longueur IM égale à l'arc de cercle IA. Le lieu du point M, lorsque I varie, est une développante de cercle. Portons sur la tangente en M à cette développante, parallèle à OI, à partir du point de contact, une longueur MP constante et égale à a.

La développante peut être considérée comme engendrée par un point de la droite IM roulant sur le cercle directeur. Dans ce mouvement le point P, invariablement lié à IM, décrit une courbe et le point I étant le centre instantané de rotation, la normale en P à cette courbe est, d'après un théorème classique, la droite PI. Par suite, la sous-normale polaire de la courbe est constante et celle-ci est une spirale d'Archimède. Ainsi :

Si sur les tangentes à une développante de cercle on porte, à partir du point de contact, une longueur constante, égale au rayon du cercle directeur, le lieu des points ainsi obtenus est une spirale d'Archimède, ayant pour pôle le centre du cercle directeur.

La figure IMPO est un rectangle, donc :

La podaire d'une développante de cercle, par rapport au centre du cercle directeur, est une spirale d'Archimède.

Il s'ensuit, d'après une propriété bien connue, que :

La caustique d'une développante de cercle, le point lumineux étant au centre du cercle directeur, est une développée de la spirale d'Archimède.

La polaire de M, par rapport au cercle directeur,

est la perpendiculaire abaissée de I sur OM. Pour avoir le point où elle touche son enveloppe, quand I varie sur le cercle, il faut abaisser de O une perpendiculaire sur la tangente en M à la développante, c'est-à-dire sur MP, et prendre son intersection avec la polaire; ce qui donne un point Q. La sous-tangente polaire de la courbe lieu de ce point est OI; elle est donc constante et le lieu du point Q est une spirale hyperbolique. Ainsi :

La polaire réciproque d'une développante de cercle, par rapport au cercle directeur, est une spirale hyperbolique.

La polaire IQ coupe en R la droite OM et l'on a $OR \times OM = a^2$, c'est-à-dire que le point R décrit la courbe inverse de la développante. Or, si l'on mène la tangente en R à cette courbe, l'angle de cette tangente avec OR, d'après la propriété fondamentale des courbes inverses, est égal à l'angle OMP, ou, ce qui revient au-même, à l'angle IOR. Donc, si l'on désigne par S le point de rencontre de cette tangente avec la perpendiculaire élevée en O à OM, on a $RS = OI = a$. La portion de la tangente comprise entre le point de contact et la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le pôle est constante, ce qui caractérise la spirale tractrice. Par suite :

La courbe inverse de la développante de cercle, par rapport au cercle directeur, est une spirale tractrice.

Nous avons vu plus haut que la spirale d'Archimède est engendrée par un point invariablement lié à la droite IM, lorsque celle-ci roule sur le cercle directeur. La formule de Savary, appliquée à ce cas particulier,

fournit la construction suivante pour le centre de courbure de la spirale :

Élever en I *la perpendiculaire à* IP *jusqu'à sa rencontre avec* PM *et joindre le point ainsi obtenu au pôle* O *par une droite; cette droite coupe la normale* IP *au centre de courbure* C.

En observant que la spirale d'Archimède et la spirale hyperbolique sont inverses l'une de l'autre par rapport au cercle directeur, et en se rappelant que les centres de courbure de deux courbes inverses, en des points correspondants, sont en ligne droite avec le pôle d'inversion, on voit que la droite OC passe par le centre de courbure de la spirale hyperbolique, lieu du point Q. On a ainsi une construction relativement simple de ce point.

Quand à la spirale tractrice, le fait qu'elle est l'inverse de la développante de cercle par rapport au cercle directeur, montre que le centre de courbure, correspondant au point R, est sur la droite OI; c'est-à-dire sur la droite qui joint le pôle au milieu de la portion de tangente comprise entre le point de contact et la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le pôle.

Lorsqu'une courbe mobile roule sans glisser sur une courbe fixe, on sait que les droites invariablement liées à la courbe mobile ont pour enveloppe des courbes dont les centres de courbure sont sur un cercle, dit *cercle des rebroussements*, tangent, au centre instantané de rotation, aux deux courbes fixe et mobile. Ici ce cercle doit contenir le centre de courbure de la courbe enveloppée par la droite IM, c'est-à-dire le point O; il coïncide donc avec le cercle décrit sur IO comme diamètre. Le cercle des inflexions, symétrique

du précédent, par rapport à la droite IM, est donc connu lui aussi.

Or, de la connaissance de ce cercle, on déduit la solution de n'importe quelle question relative à la courbure des roulettes et, par suite, si l'on veut, de nouvelles constructions du cercle osculateur des courbes considérées.

[P'4]

SUR UNE CORRESPONDANCE BIRATIONNELLE INVOLUTIVE DANS L'ESPACE;

PAR M. G. FONTENÉ.

---

1. *Six points étant donnés dans l'espace, on considère la correspondance birationnelle involutive qui existe entre deux points* M *et* M' *tels que la quadrique passant par les six points et par l'un des deux points* M, M' *passe par l'autre.* Soit Γ la cubique gauche qui passe par les six points; le point M étant donné, si l'on mène la corde H' de la cubique qui passe en M, il passe par la cubique et par la droite des quadriques en nombre simplement infini, de sorte que le point M' associé au point M se trouve sur la corde H' de la cubique. *Les droites* MM' *forment donc, non pas un complexe, mais une congruence, à savoir la congruence des cordes de la cubique gauche* Γ, *chaque droite* μ *de la congruence portant des couples de points* M, M' *en nombre infini.*

Sur chaque droite μ, les couples (M, M') sont en involution. Quels que soient les six points sur la

cubique, l'un des couples est formé des points d'appui I et I′ de la droite sur la courbe. On a des couples intéressants en coupant la droite par le plan de trois des six points et par le plan des trois autres, de toutes les manières possibles. *L'étude de la surface formée par les points doubles de ces involutions paraît assez difficile.*

2. Sur une biquadratique passant par les six points, il existe des couples de points (M, M′) en nombre simplement infini; les droites MM′ sont génératrices de l'hyperboloïde qui passe par la cubique gauche Γ et par la biquadratique. Dans son *Traité de Géométrie analytique* (t. II, 2ᵉ Partie, p. 376), Painvin donne l'énoncé suivant : *Si, par six points fixes d'une biquadratique gauche, on mène des quadriques, celles-ci coupent encore la courbe en deux points* M, M′, *et la droite qui joint ces deux points engendre un hyperboloïde.* C'est cet énoncé qui m'a conduit aux considérations précédentes.

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *A propos de la spirale tractrice.* — Ainsi que M. Balitrand en renouvelle la remarque dans la Note récente qu'il lui a consacrée (*N. A.*, 1915, p. 348), une telle courbe est un cas particulier de la *tractrice circulaire*, courbe que décrit un point M tiré à l'extrémité d'un segment NM de longueur constante par un point N qui décrit un cercle. Ce cas particulier est celui où le segment MN est égal au rayon de ce cercle.

La construction du centre de courbure d'une telle courbe, et celle du centre de courbure de sa développée résultent d'un théorème applicable à une tractrice *absolument quelconque*, que j'ai rencontré naguère à l'occasion d'une *théorie géométrique du virage à bicyclette* (*Génie civil*, t. XXIX, 1896, p. 140), théorème que, après l'avoir légèrement modifié, j'ai, depuis longtemps, introduit dans mon Cours de l'École des Ponts et Chaussées et, plus récemment, dans mon Cours de l'École Polytechnique (*voir* notamment les *Feuilles autographiées de la deuxième Division* pour la session 1912-1913, p. 187).

Ce théorème peut s'énoncer ainsi : *Si la courbe* (M) *est tractrice de la courbe* (N) *quelconque :* 1° *le centre de courbure* C *de la courbe* (M) *se trouve à l'intersection de sa normale avec celle de la courbe* (N); 2° *le centre de courbure* C′ *de la développée de* (M) *est à l'intersection de la normale à cette développée avec la droite qui joint le*

centre de courbure O *de la courbe* (N) *au point* P *où la perpendiculaire élevée en* C *à* NC *rencontre* MN.

Les notations ici employées étant celles mêmes de la Note de M. Balitrand, ce double énoncé fournit immédiatement, pour la spirale tractrice envisagée par cet auteur, la construction des centres de courbure C et C′. On remarquera que ce point C′ est le symétrique par rapport à C du point C_1 obtenu par M. Balitrand (*loc. cit.*, p. 351). Il est vrai que l'auteur dit que « CC_1 est égal au rayon de courbure » sans dire que C_1 soit le centre de courbure; mais comme, en général, quand on construit un rayon de courbure, on le suppose mis en place, quelques lecteurs auraient pu s'y tromper.

J'ajouterai que la démonstration du théorème général ci-dessus est des plus simples et élémentaires.

Il est très simple aussi d'obtenir la détermination du centre de courbure de la roulette (O) engendrée par le pôle O de la spirale tractrice roulant sur une droite, ainsi que celle du centre de courbure de la développée de cette roulette, *sans aucun calcul*.

Conservant les notations de M. Balitrand, nous appelons OM et OT la normale et la tangente en O à cette roulette, qui déterminent sur la base le segment de longueur constante $MT = 2a$, dont le milieu est N, γ le centre de courbure de (O), situé sur OM, entre O et M. Si les perpendiculaires élevées en T et en M à TM coupent, respectivement en t et en m, l'une la normale OM à la roulette, l'autre la normale à sa développée (perpendiculaire en γ à $O\gamma$), on a, en représentant par $d(M)$, $d(T)$, $d(O)$ les arcs infiniment petits décrits simultanément par les trois points,

$$\frac{d(M)}{d(O)} = \frac{Mm}{O\gamma}, \qquad \frac{d(T)}{d(O)} = \frac{Tt}{O\gamma}.$$

Et comme, par hypothèse, $d(\mathrm{M}) = d(\mathrm{T})$, on en déduit que $\mathrm{M}m = \mathrm{T}t$. Les triangles rectangles $\mathrm{TO}t$ et $\mathrm{M}\gamma m$ sont dès lors égaux et $\mathrm{O}t = \gamma\mathrm{M}$. Autrement dit : *le centre de courbure* γ *est symétrique du point* O *par rapport au milieu* I *de* Mt (*point situé sur la perpendiculaire en* N *à la base*). C'est le résultat obtenu par M. Balitrand.

Il suit immédiatement de là, en vertu d'un théorème bien connu de Mannheim, que *la normale à la courbe que décrit le point* I *passe par le milieu du rayon de courbure de la développée en* γ. Tout revient donc à trouver cette normale, ou, ce qui revient au même, *la tangente au lieu du point* I. Or, le segment IM, qui touche son enveloppe en γ, ayant sur la base une projection MN de grandeur constante, un théorème que j'ai donné jadis (*N. A.*, 1886, p. 89) montre que *cette tangente coupe* MN *en un point* U *symétrique, par rapport au milieu de* MN, *du pied* G *de la perpendiculaire abaissée de* γ *sur* MN.

Pour montrer l'identité de cette construction avec celle qu'a obtenue M. Balitrand, il suffit de faire voir que, si la perpendiculaire élevée en I à IU coupe MN en L, le pied K de la perpendiculaire abaissée de L sur IO est au milieu de ce segment, ce qui n'offre aucune difficulté.

M. d'Ocagne. — *Au sujet d'une Note récente de M. Goormaghtigh* (*N. A.*, 1915, p. 393). — Le théorème donné, au début de cette Note, comme fondamental (p. 396) et obtenu à la suite de calculs assez laborieux, est, en quelque sorte, intuitif, comme je l'ai fait remarquer il y a longtemps (*N. A.*, 1886, p. 88). Il entraîne immédiatement la construction du centre de courbure établie à la suite (p. 397), en vertu d'un

théorème bien connu de Mannheim, identique d'ailleurs à celui qui fait l'objet du renvoi (2) de cette même page 397 (*voir* MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique*, 2e édition, p. 172, avec la Remarque de la page 173). L'application à l'hyperbole, qui termine le n° 6 (p. 402), a d'ailleurs été explicitement formulée par Mannheim (*Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 21).

La relation entre deux courbes, désignée dans la Note en question par les termes d'*hyperbolisme* et *antihyperbolisme*, se confond avec la *transformation par l'abscisse* (*inverse* dans le premier cas, *directe* dans le second) dont l'idée a été émise par Segner en 1761 et qui se prête à d'importantes applications en calcul graphique comme on peut le voir dans mon Ouvrage *Calcul graphique et Nomographie* (Paris; Doin, 1908; 2e édition, 1914). Le mode de liaison entre les tangentes aux deux courbes, que je donne à cet endroit (p. 67), me semble plus simple que ceux indiqués par M. Goormaghtigh (p. 405 et 409). Il consiste, si l'on se reporte à la figure 5 (p. 403) de la Note de cet auteur, en ce que *le point de rencontre des tangentes* MS *et* LS′ *se trouve sur la droite* mT.

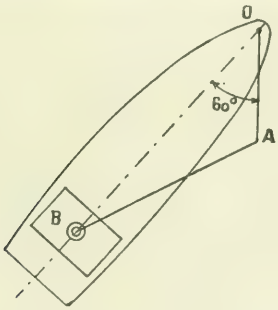
CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorème des flèches réciproques de James Maxwell; théorème de Castigliano. Leur application aux poutres continues.*

II. *Appliquer la théorie générale des turbines* (sur laquelle on n'aura rien à dire) : 1° *au cas de la turbine Jonval-Kœcklin à tube de succion;* 2° *au cas de la turbine Girard à libre déviation.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un des cylindres d'un moteur à pétrole tourne autour de l'axe* O, *tandis que le piston est*



relié à l'axe fixe A *par une barre de jonction* AB.

Diamètre intérieur des cylindres $= 0^m,115$;

Barre AB $= 0^m,35$;

Longueur OA $= 0^m,064$.

Le cylindre tourne à la vitesse constante de 1200 *tours par minute.*

1° *Déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de* AB *pour la position où* $\widehat{BOA} = 60°$;

2° *La pression dans le cylindre étant de* $8^{kg},5$ *par cen-*

timètre carré, trouver le moment moteur de la machine pour la même position.

II. *Exemple de la détermination des constantes caractéristiques d'une voiture par une série d'essais au banc et sur route. On trouve qu'une voiture fait* 60^{km} *à l'heure en palier, en quatrième vitesse, son moteur tournant alors à* 1200 *tours à la minute, et qu'elle ne marche plus qu'à* 30^{km} *à l'heure, aussi en quatrième vitesse, à la montée d'une rampe de* 24^{mm} *par mètre. Il résulte, d'autre part, de la caractéristique de puissance du moteur que le couple moyen est égal, en mètres-kilogrammes, à* 11,7 *à* 1200 *tours et à* 13,6 *à* 600 *tours, dans les mêmes conditions, bien entendu, de distribution et d'allumage au banc que sur route. On donne enfin le poids* $P = 1500^{kg}$ *de cette voiture en ordre de marche et le rendement* $\rho = 0,75$ *du mécanisme de transmission, et l'on demande de déduire de toutes ces données les deux constantes caractéristiques* f_1 *et* λ *qui interviennent dans l'équation générale de locomotion :*

$$F = Pf_1 + P\frac{v'}{g} + \lambda v^2 \pm Pi,$$

où v *désigne la vitesse de la voiture en kilomètres à l'heure.* (Juillet 1913.)

Épreuve théorique. — I. Cinématique graphique. — *Construction et usage du cinème des accélérations.*

Application au système bielle-manivelle dans le cas d'un mouvement de rotation uniforme. Règle de Mohr.

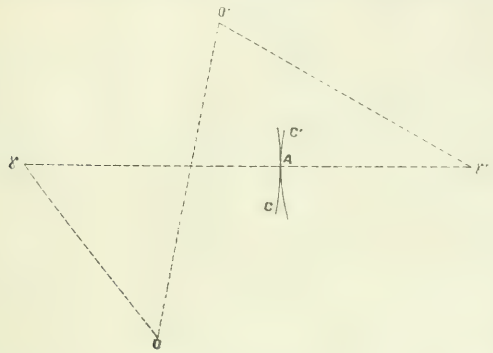
II. Dynamique. — *Exposer, à l'aide de graphiques, le mode de fonctionnement dynamique du régulateur à action directe. Montrer les inconvénients de l'isochronisme absolu. Comparer entre eux, au point de vue de la promptitude d'action, les régulateurs de Watt et de Porter.*

On rappelle l'équation

$$\left(\frac{a^2}{gb}P_3 + bQ_1\sin^2\alpha\right)\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$= \frac{\omega^2 - \omega'^2}{\omega^2}g\sin^2\alpha(aP_2 + bQ_1) - a^2P_3\cos\alpha.\alpha'^2,$$

qui permet d'étudier le mouvement relatif du régulateur dans son plan, et conduit à la notion de promptitude d'action.

Épreuve pratique. — I. *Deux engrenages, d'axes* O *et* O', *sont en prise par un couple de dents à profils circulaires* C.



et C' *qui se touchent actuellement en* A, *les centres des profils étant* γ *et* γ'. *La roue* O' *tourne uniformément à raison de* 10 *radians par seconde.*

Calculer pour la position dessinée du mécanisme :

1° *La vitesse angulaire de la roue* O *et la vitesse relative de glissement entre les deux profils;*

2° *L'accélération angulaire de la roue* O.

II. *Calculer les éléments d'une turbine à réaction, d'axe vertical, à établir sur une chute de* $1^{m},60$, *ayant un débit de* $1^{m^3},5$.

Données :

Degré de réaction $\varepsilon = \frac{1}{2}$;

Angles de construction $\alpha = \beta_1 = 90°$;

Nombre d'aubes fixes $n = 18$;

Épaisseur de ces aubes $e = 8^{mm}$;

Relations entre les dimensions

$$a = \frac{r}{2}, \qquad a_1 = r_1.$$

(Novembre 1911.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir la relation qui existe entre les tensions aux extrémités d'un câble passant sur un tambour circulaire, en tenant compte du frottement. Application à la recherche des tensions dans les brins d'une courroie de transmission.*

II. *Deux réservoirs ouverts à l'air libre renferment de l'eau jusqu'à des niveaux* A *et* B *maintenus constants à des cotes* z_1 *et* z_2 ($z_1 > z_2$); *ils sont réunis par un tuyau cylindrique de longueur* L; *quel doit être le diamètre de ce tuyau pour que l'eau s'y écoule avec un débit donné* Q?

En un point C *de ce tuyau, situé à une cote* z *et à une distance* L_2 *de l'extrémité inférieure, est branché un deuxième tuyau de longueur* L_3, *débouchant dans un réservoir ouvert à l'air libre où l'eau se maintient à un niveau constant* D *de cote* z_3; *calculer le diamètre de ce dernier tuyau pour que les débits d'écoulement par les deux tuyaux ouverts simultanément soient les mêmes en* B *et* D, *et calculer ces débits.*

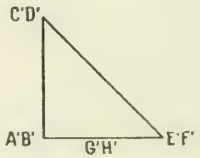
Application : $z_1 = 356^m$, $z_2 = 300^m$, $z = 310^m$, $z_3 = 305^m$, $L = 5^{km}$, $L_2 = 3^{km}$, $L_3 = 200^m$, $Q = 500^l$ par seconde.

On a

$$\frac{1}{4}\,DJ = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{R}\right)u^2.$$

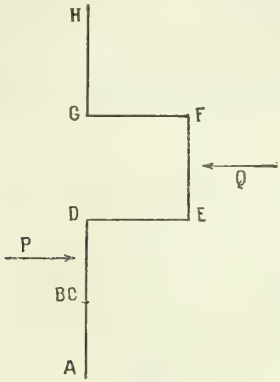
On néglige les pertes de charge à l'entrée des différents tuyaux.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un vilbrequin à deux manetons représenté ci-après par ses deux projections;*



les dimensions sont les suivantes : $AB = GH = 400^{mm}$, $CD = EF = 300^{mm}$, $CB = GF = 320^{mm}$; A *et* H *sont les mi-*

lieux de deux paliers qui supportent le système. Le système est sollicité : 1° par une force P *agissant au milieu de* CD *perpendiculairement au plan* ABCD, *et égale*



à 3000^{kg}; *2° par une force* Q *agissant au milieu de* EF, *parallèlement à la première, mais de sens opposé, et égale à* 7000^{kg}.

On demande : 1° de calculer les réactions des appuis; 2° d'indiquer et de calculer les forces et les moments sollicitant le bras DE. (Juin 1908.)

Épreuve théorique. — Première question. — *Théorie de l'écoulement de l'eau en régime permanent dans une portion de tuyau cylindrique. Calcul du diamètre d'un tuyau dont on donne le débit et la longueur, connaissant les différences des cotes et des pressions aux deux extrémités.*

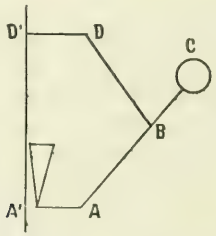
Deuxième question. — *Un volant est monté sur un arbre horizontal; on donne le rayon* R *du volant et le moment d'inertie* MK^2 *du système autour de son axe de rotation. Ce volant est soumis à un couple moteur de moment* C, *et il transmet sa puissance par l'intermédiaire d'une courroie, à une poulie montée sur un arbre parallèle au premier; on donne le rayon* R' *de la poulie, et le moment d'inertie* M'K'^{2} *de la poulie et de son arbre par rapport à leur axe de rotation.*

1° *On suppose d'abord que la poulie est soumise à un couple résistant tel que le mouvement du volant soit uniforme, et que sa vitesse angulaire soit égale à* ω; *comment calcule-t-on la section de la courroie?*

2° *On suppose qu'à un certain instant le moment du couple résistant prend et conserve une valeur constante supérieure à la précédente; quelle sera la loi du mouvement du système et quelles seront les tensions dans les brins de la courroie?*

Application. — *Le rayon du volant est* $R = 2^m$; *le poids du volant et de son arbre est* $P = 200^{kg}$, *et le rayon de giration* $K = 1^m,50$; *le rayon de la poulie est* $K' = 0^m,50$; *le poids de la poulie et de son arbre est* $P' = 800^{kg}$, *et le rayon de giration* $K' = 0^m,30$. *En régime uniforme, la puissance transmise est* 50 *chevaux, et la vitesse du volant* 90 *tours par minute. On prend* $e^{f\alpha} = e^{f'\alpha'} = 2$, *et la résistance de la courroie est de* 40^{kg} *par centimètre carré. Dans la deuxième partie, le moment du couple résistant a augmenté de la moitié de sa valeur; quelles seront les tensions et la vitesse au bout de* 5 *secondes?*

Épreuve pratique. — *Un régulateur à force centrifuge tournant autour d'un axe vertical est représenté pour*



une de ses moitiés par la figure ci-dessus : les distances DD' *et* AA' *des points* D *et* A *à l'axe sont de* 50^{mm}; AC = 150^{mm}; AB = BD = 300; *le demi-poids du manchon est de* 35^{kg}, *celui d'une boule* 10^{kg}; *les tiges* AC *et* BD *sont des barres rondes de fer forgé de* 20^{mm} *de diamètre, et de poids spécifique* 7,8.

1° *Trouver la vitesse angulaire qui maintient le régu-*

lateur dans une position telle que le centre de chaque boule se trouve à 260^{mm} *de l'axe, en négligeant les frottements et la résistance appliquée au manchon, et en supposant la masse de chaque boule concentrée en son centre; 2° calculer dans ces conditions les efforts auxquels sont soumises les tiges.* (Octobre 1908.)

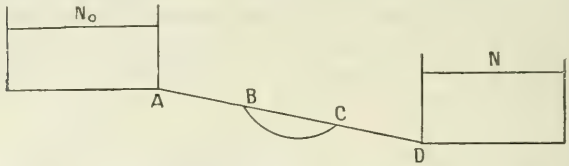
Première question. — *Principes sommaires de la construction des engrenages cylindriques à développante de cercle.*

Deuxième question. — *Dans un cylindre vertical, ouvert à l'air libre à la partie supérieure, se meut un piston*

muni d'une tige à crémaillère engrenant avec une roue dentée; ce cylindre renferme une certaine masse de gaz se détendant suivant la loi $pv^2 = \text{const.}$ *On donne la section* S *du cylindre, le poids* P *du piston et de sa tige, le poids* P' *de la roue, son rayon extérieur* r *et son rayon de giration* K; *on donne la pression atmosphérique* p_a, *la pression initiale du gaz* p_0 *et la longueur* x_0 *de la portion du cylindre qu'il occupe à l'instant initial; en supposant que le piston soit au repos à cet instant et qu'il n'y ait aucun effort résistant appliqué à la roue, on demande de former l'équation qui donne la vitesse du piston, de trouver le point du cylindre où il s'arrête et la pression finale du gaz.*

Troisième question. — *Un tuyau cylindrique* AD, *de diamètre* D *et de longueur* L, *met en communication deux*

réservoirs ouverts à l'air libre, où les niveaux de l'eau N_0



et N *sont maintenus à des cotes constantes* z_0 *et* z *(on pose* $z_0 - z = h$*); quel est le débit de ce tuyau?*

Entre deux points B *et* C *de ce tuyau, situés aux cotes* z_1 *et* z_2 *et tels que*

$$AB = L_1, \qquad BC = L_2, \qquad CD = L_3,$$

on établit un tuyau supplémentaire de dérivation, de longueur L'_2 *et de diamètre* D', *et l'on fait couler l'eau par les deux tuyaux simultanément entre* B *et* C. *Calculer les nouvelles pressions qui s'établissent en* B *et* C *et le nouveau débit de la canalisation.*

Application au cas où

$$L_1 = L_2 = L'_2 = L_3 = \frac{1}{3}$$

et où $D' = D$. *Calculer les différences entre les pressions nouvelles et les pressions primitives en* B *et* C *et calculer le rapport entre le débit nouveau et le débit primitif.*

(On supposera connues toutes les formules usuelles relatives aux tuyaux; on prendra pour b_1 *une valeur unique et l'on négligera les pertes de charge autres que celles qui sont produites par les tuyaux.)*

(Juin 1909.)

Première question. — *Déterminer la puissance d'une pompe refoulant l'eau d'un réservoir inférieur dans un réservoir supérieur par un tuyau cylindrique de longueur et de diamètre donnés; on donne les cotes des niveaux de l'eau ainsi que les pressions dans les réservoirs.*

En supposant que la dépense de premier établissement du tuyau soit proportionnelle à sa longueur et à son diamètre, trouver pour une longueur et un débit donnés le

diamètre le plus avantageux à donner au tuyau; on rendra minimum l'ensemble de l'amortissement de la dépense précédente et des frais courants proportionnels à la puissance de la pompe.

Deuxième question. — *Un cylindre plein homogène, de poids* P *et de rayon* R, *est mobile autour d'un axe horizontal; une corde, de poids négligeable, fixée à ce cylindre par l'une de ses extrémités et enroulée sur sa surface, porte à son autre extrémité un poids* Q *qui tombe verticalement. Sur ce même cylindre sont disposées des ailettes, de poids négligeable, éprouvant de la part de l'air une résistance proportionnelle à la vitesse angulaire, le moment du couple résistant étant représenté par* $B\omega$. *Étudier le mouvement du système abandonné à lui-même sans vitesse initiale. Vers quelle limite tend la vitesse angulaire ? Trouver l'instant à partir duquel la vitesse différera de cette limite de moins de* 10 *pour* 100.

(Octobre 1909.)

Rennes.

Épreuve théorique. — Problème. — *Connaissant les coefficients* λ *et* μ *de Lamé, déterminer le coefficient* d'élasticité longitudinale *d'un prisme soumis à une traction uniforme sur deux bases opposées, le coefficient de compressibilité d'une* sphère pleine *soumise à une pression uniforme et le coefficient* d'élasticité radiale *dans cette sphère.*

Question de cours. — *Application du principe de l'équivalence et du principe de Carnot à un gaz qui suit la loi de Joule et la loi de Mariotte. Détermination, par l'intermédiaire de ce gaz, de l'équivalent mécanique de la chaleur et de la température absolue.*

Épreuve pratique. — Première question. — *Un ressort de masse négligeable à peu près plan est encastré d'une part dans un encastrement fixe et d'autre part dans un encastrement appartenant à un solide tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan du ressort; le ressort est*

supposé construit de manière que l'encastrement fixe ne réagisse constamment que par un couple.

1° *Démontrer que le mouvement du solide tournant sera oscillatoire simple et déterminer sa demi-période* T.

2° *Deux ressorts* R *et* S *remplissant les conditions précédentes ont été placés aux mêmes encastrements et actionnent le même solide tournant.*

La longueur du ressort R *est quadruple de celle du ressort* S; *leurs sections sont deux rectangles dont les dimensions parallèles au plan du ressort sont les mêmes, mais dont les dimensions perpendiculaires au plan du ressort sont différentes, celle du ressort* R *est double de celle du ressort* S.

Sachant que les deux ressorts produisent des mouvements oscillatoires simples de même période, calculer le rapport de leurs coefficients d'élasticité longitudinale.

Deuxième question. — *Un diapason donnant* 100 *vibrations complètes par seconde perd la moitié de son amplitude vibratoire en* 10 *secondes, calculer l'amortissement, c'est-à-dire la décroissance proportionnelle de l'amplitude par période.*

Le régime vibratoire du diapason est assimilé au régime d'un mouvement pendulaire uniformément amorti.

On calculera l'inverse de l'amortissement.

(Juin 1910.)

QUESTIONS.

2271. Étant donnée une hyperbole par ses asymptotes et un point M, démontrer que le centre de courbure en M peut être obtenu par l'une des constructions géométriques suivantes :

1° On mène la tangente en M qui coupe les asymptotes en A et B et l'on élève en ces points les perpendiculaires aux asymptotes qui coupent la normale en M respectivement en α et β et se rencontrent en P. On joint PM et, par α, on mène une parallèle à la tangente en M ; la parallèle à PB menée par le point d'intersection de ces deux droites passe par le centre de courbure.

2° On joint $\beta\alpha$ et, par β, on mène une parallèle à PA; la parallèle à la tangente en M, menée par le point de rencontre de ces deux droites, passe au centre de courbure.

3° On joint $B\alpha$ et par M on mène une parallèle à PA; la parallèle à PB, menée par le point de rencontre de ces deux droites, passe au centre de courbure. F. Balitrand.

2272. On mène d'un point M les quatre normales à une ellipse (E) et les tangentes à cette ellipse aux pieds des normales. Il existe une parabole (P), et une seule, qui touche ces quatre tangentes. Démontrer que les points où elle les touche sont sur l'hyperbole d'Apollonius (H) de M.

F. Balitrand.

2273. Si A et A′ sont deux points de rebroussement diamétralement opposés d'une hypocycloïde à quatre rebroussements les bissectrices des angles que les tangentes à cet courbe font avec AA′ ont pour enveloppes les deux hypocycloïdes à trois rebroussements ayant l'une un point de rebroussement en A et le sommet opposé en A′, et l'autre *vice versa*.

M. d'Ocagne.

√ 2274. Dans un triangle ABC, L_a, L_b, L_c sont les centres des cercles exinscrits. Les droites qui joignent les sommets au point de Lemoine du triangle $L_a L_b L_c$ rencontrent les côtés BC, CA, AB respectivement en α, β, γ. Montrer que le cercle $\alpha\beta\gamma$ passe au point φ de Feuerbach du triangle ABC.

V. Thébault.

2275. Les asymptotes d'une hyperbole et les droites qui joignent un point quelconque de cette courbe à ses deux foyers sont tangentes à un même cercle.

M. D'OCAGNE.

2276. Étant données dans un plan deux coniques f et φ, les tangentes menées à φ des foyers de f et les tangentes menées à f des foyers de φ sont huit tangentes d'une même conique.

F. BALITRAND.

2277. Soient Ox et Oy les axes d'une ellipse; M un point de cette courbe; α le point où la normale en M coupe l'axe Ox. La perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en M et la perpendiculaire abaissée de α sur OM se rencontrent en un point tel que la parallèle à Oy, menée par ce point, passe par le centre de courbure de l'ellipse en M. F. BALITRAND.

2278. Une ellipse étant donnée par ses foyers F et F′ et un point M, on élève en F une perpendiculaire à FM qui rencontre en α la normale en M; au point α on élève à la normale une perpendiculaire qui rencontre FM en β; la parallèle à FF′ menée par β passe par le centre de courbure de l'ellipse en M.

F. BALITRAND.

2279. Soit OAB le triangle formé par deux diamètres conjugués d'une ellipse et la tangente en un point M à cette courbe. Élevons en A et B les perpendiculaires à la tangente et soient α et β les points où elles coupent respectivement les perpendiculaires abaissées de M sur OA et OB. Démontrer que la droite $\alpha\beta$ passe par le centre de courbure de l'ellipse en M et par le point de rencontre des hauteurs du triangle OAB.

F. BALITRAND.

ERRATA.

Page 368, 5e ligne en remontant, *au lieu de* parabole NT, *lire* parallèle NT.

Même page, 2e ligne en remontant, *au lieu de* de T est le ..., *lire* de TH est le ...

[M¹8a] [M⁴aα]

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LA RECTIFICATION ET LA QUADRATURE DES ÉPI- ET HYPOCYCLOÏDES (¹);

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Le but de cette Note est de faire connaître une forme géométrique des plus simples qui peut être donnée à la solution du double problème de la rectification et de la quadrature des épi- et hypocycloïdes, envisagé dans sa plus grande généralité.

Une épi- ou hypocycloïde étant engendrée par un point M de la circonférence d'un cercle *générateur* $\mathcal{G}$ roulant, soit extérieurement, soit intérieurement, sur un cercle *base* $\mathfrak{B}$, nous considérerons deux autres cercles, concentriques à ce dernier, qui jouent aussi un rôle important dans les propriétés de la courbe : celui $\mathcal{L}$, que nous appellerons cercle *limite*, qui constitue avec $\mathfrak{B}$ l'enveloppe des positions de $\mathcal{G}$, et celui $\mathfrak{M}$, que nous appellerons cercle *moyen*, qui est le lieu du centre de $\mathcal{G}$. La courbe, tout entière inscrite dans la couronne comprise entre $\mathfrak{B}$ et $\mathcal{L}$, a ses points de rebroussement, équidistants, sur le premier de ces cercles, et ses sommets, également équidistants, sur le second. Elle est constituée par la répétition identique de l'arc allant d'un point de rebroussement au suivant, engendré pendant une révolution complète du cercle $\mathcal{G}$ et qui,

(¹) Les principaux théorèmes rencontrés dans cette étude ont été communiqués par l'auteur à l'Académie des Sciences dans sa séance du 8 novembre 1915 (*Comptes rendus*, t. CLXI, p. 556).

pour cette raison, sera dit un *arc complet;* de même, le segment compris entre un tel arc et le cercle $\mathfrak{B}$ sera un *segment complet*, le secteur compris entre le même arc et les rayons issus du centre O de $\mathfrak{B}$ et aboutissant en ses extrémités, un *secteur complet*. L'aire comprise entre deux demi-arcs complets, issus d'un même point de rebroussement, et le cercle $\mathfrak{L}$ sera dite un *segment complémentaire*.

Les rayons γ, β, λ, μ des cercles $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ sont évidemment liés entre eux par les relations

$$(1) \qquad 2\mu = \beta + \lambda, \qquad 2\gamma = \pm(\lambda - \beta),$$

le signe + s'appliquant aux épicycloïdes, le signe — aux hypocycloïdes; mais la suite de cette Note fera comprendre l'intérêt qu'il y a à faire intervenir explicitement ces quatre rayons dans les formules de façon à les rendre indistinctement applicables aux épi- et hypocycloïdes et à faciliter leur interprétation géométrique.

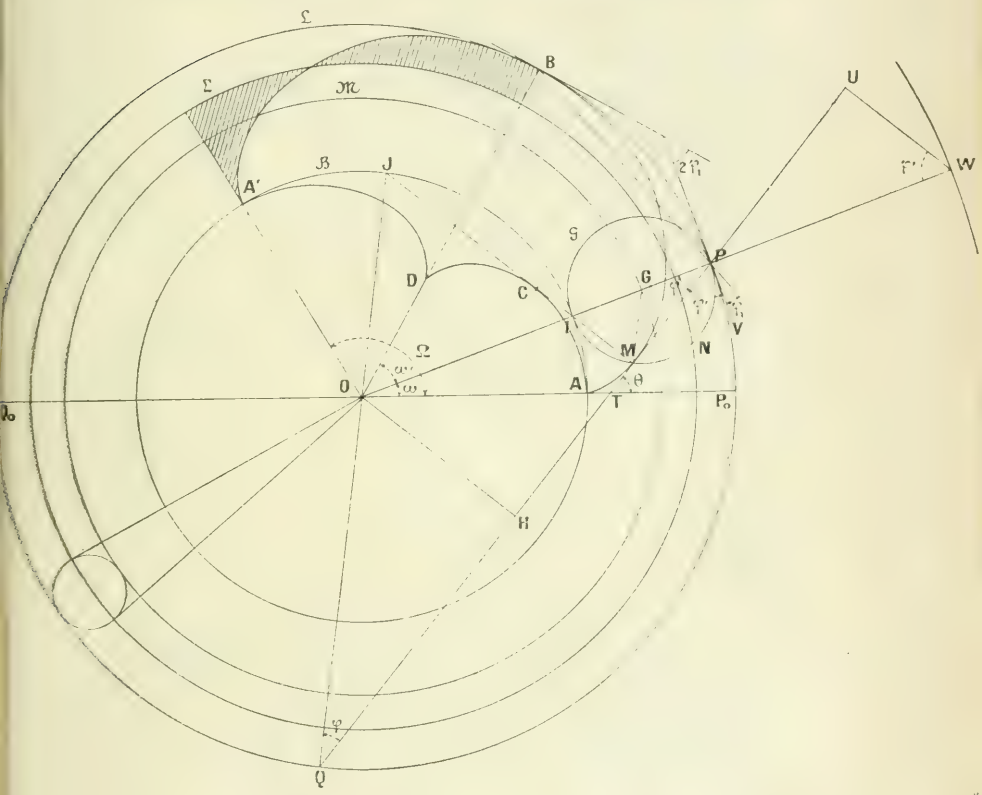
D'une manière générale, nous désignerons respectivement par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ les épi- et les hypocycloïdes. Lorsque $\beta = n\gamma$, *n étant entier*, la courbe devient *algébrique* et possède *n points de rebroussement réels;* nous la désignerons alors par $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$.

Le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$, ou n, qui définit la similitude de l'épi- ou hypocycloïde, peut d'ailleurs être dit son *indice*.

Les plus classiques de ces courbes sont $\mathcal{E}_1$ (*cardioïde*), $\mathcal{E}_2$ (*néphroïde*), $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$, cette dernière dite parfois *astroïde*.

La figure ci-contre s'applique au cas d'une $\mathcal{E}$; mais, nous le répétons, les résultats exprimés en γ, β, λ, μ qui en seront déduits s'étendront sans modification

aux $\mathcal{H}$. Nous indiquerons, au reste, chemin faisant, les différences principales dans l'écriture des formules in-



termédiaires qui interviendraient dans le second cas [1].

---

[1] On pourrait sans doute atteindre à une généralité absolue en ayant recours à certaines conventions de signe relatives aux longueurs des tangentes et des arcs ainsi qu'aux aires des segments; mais cela risquerait d'introduire une apparente complication sans bénéfice réel puisqu'aucune ambiguïté ne pèse sur les résultats ici obtenus.

2. Pour chaque position de $\mathcal{G}$, la normale en M à la courbe $\mathcal{E}$ qu'engendre ce point passe par le point de contact I de $\mathcal{G}$ et de $\mathfrak{M}$ (centre instantané); donc la tangente passe par le point de contact P de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{L}$. Cette tangente coupe le cercle $\mathcal{L}$ en un second point Q, et l'on voit que, si l'on considère la position infiniment voisine P'Q' de cette tangente, les triangles infinitésimaux MPP', MQQ' sont semblables, et, par suite, que si $d(\mathrm{P})$ et $d(\mathrm{Q})$ désignent les arcs infiniment petits décrits simultanément par ces points, on a

$$\frac{d(\mathrm{P})}{d(\mathrm{Q})} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}.$$

Si G est le centre de $\mathcal{G}$, la similitude des triangles GPM et OPQ permet d'en déduire

$$\frac{d(\mathrm{P})}{d(\mathrm{Q})} = \frac{\gamma}{\mu},$$

d'où, en intégrant à partir de la position initiale $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$ de PQ

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{arc} \mathrm{P}_0\mathrm{P}}{\operatorname{arc} \mathrm{Q}_0\mathrm{Q}} = \frac{\gamma}{\mu}.$$

Dans le cas d'une $\mathcal{H}$, la formule (2) subsisterait, mais les arcs $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}$ auraient des sens contraires au lieu d'avoir, comme ici, le même sens.

On tire immédiatement de là, pour l'angle θ que la tangente MT fait avec le rayon initial OA (mesuré par la demi-somme des arcs $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}$), la valeur

$$(3) \qquad \theta = \frac{\lambda}{2\gamma}\omega,$$

ω étant l'angle $\mathrm{P}_0\mathrm{OP}$, et, par suite, aussi pour l'angle OPM ou φ, égal à $\theta - \omega$, la valeur

$$(4) \qquad \varphi = \frac{\beta}{2\gamma}\omega.$$

Cette dernière formule comporte des conséquences curieuses que nous ferons remarquer en passant [1].

Si Ω est la valeur de ω correspondant à un arc complet, on voit que

$$\Omega = \frac{2\pi\gamma}{\beta}. \tag{5}$$

Donc, si nous appelons ω' l'angle BOP, il vient

$$\omega' = \frac{\Omega}{2} - \omega = \frac{2\gamma}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

ou encore, si nous désignons par φ' l'angle de la tangente MP avec la tangente en P au cercle $\mathcal{L}$,

$$\omega' = \frac{2\gamma}{\beta}\varphi', \tag{4 bis}$$

ou enfin, puisque l'angle φ_1 que BP fait avec la tangente PV au cercle $\mathcal{L}$ est égal à $\frac{\omega'}{2}$,

$$\varphi' = \frac{\beta}{\gamma}\varphi_1.$$

---

[1] Ces variables φ et ω constituent ce qu'on peut appeler des *coordonnées naturelles* pour l'étude en question. Leur emploi rend absolument intuitives certaines propositions connues relatives aux épi- ou hypocycloïdes, qui se démontrent traditionnellement de façon beaucoup plus laborieuse. Il suffit, par exemple, ayant posé $OIJ = \varphi'$ et $IGM = \varphi''$, de remplacer, dans l'équation (4), l'angle φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi'$ ou $\frac{\varphi''}{2}$ pour obtenir sans autre calcul les théorèmes suivants :

La développée d'une épi- ou hypocycloïde est une épi- ou hypocycloïde semblable à la première (même indice), mais ayant pour cercle limite le cercle base de celle-ci.

L'enveloppe du diamètre du cercle générateur qui passe par le point décrivant d'une épi- ou hypocycloïde est une épi- ou hypocycloïde ayant pour cercle limite le cercle moyen de la première avec un indice double du sien.

Dans le cas où il s'agirait d'une $\mathcal{H}$ au lieu d'une $\mathcal{E}$, le résultat serait le même, mais les angles φ_1 et φ' seraient comptés du même côté de la tangente au lieu de l'être de part et d'autre. Cela constitue, comme on voit, un mode de génération très simple de toutes les $\mathcal{E}$ et les $\mathcal{H}$ admettant $\mathcal{L}$ comme cercle limite.

Il résulte de ce mode de génération que *les courbes* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{H}$ *ayant même cercle* $\mathcal{L}$ *et correspondant à un même indice* $\frac{\beta}{\gamma}$ *sont telles que leurs tangentes issues d'un même point* P *de* $\mathcal{L}$ *sont symétriques par rapport à la tangente* PV *à ce cercle.*

Si $\frac{\beta}{\gamma} = 1$, la tangente à la courbe $\mathcal{E}_1$ (cardioïde) est symétrique de BP par rapport à la tangente à $\mathcal{L}$ en P. On peut donc dire que *la cardioïde est la caustique par réflexion des rayons issus de son sommet par rapport à son cercle limite.* A la forme près, ce théorème est bien connu.

Si $\frac{\beta}{\gamma} = 2$, la tangente à la courbe $\mathcal{E}_2$ (néphroïde) fait avec la tangente à $\mathcal{L}$ en P un angle double de celui que BP fait avec cette tangente, c'est-à-dire égal à celui que fait avec cette même tangente la tangente à $\mathcal{L}$ en B; de là découle immédiatement ce théorème, découvert pour la première fois par Huygens (*Œuvres*, t. VIII, p. 214), que *la néphroïde est la caustique par réflexion des rayons parallèles au diamètre sur lequel se trouvent ses rebroussements par rapport à son cercle limite.*

D'une manière générale, on passe d'une $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$ à une autre par la transformation tangentielle définie, en chaque point P du cercle limite $\mathcal{L}$ commun, par la relation liant les angles φ_n et $\varphi_{n'}$ des tangentes à ces courbes avec la tangente PV à ce cercle, savoir

$$\frac{\varphi_n}{n} = \frac{\varphi_{n'}}{n'},$$

les angles φ_n et $\varphi_{n'}$ étant de même sens pour deux courbes de même espèce, et de sens contraires dans l'autre cas.

Remarquons encore que l'angle de deux droites n'étant défini qu'à π près, la division de cet angle en n parties égales conduit à n droites distinctes. Les n droites ainsi obtenues pour chaque tangente à une $\mathcal{E}_n$ passent par les n sommets de cette courbe.

3. Si nous prolongeons MI et QO jusqu'en leur point de rencontre J, le triangle OIJ est isocèle comme OPQ puisque IJ est perpendiculaire à PQ; donc J se trouve sur le cercle $\mathfrak{V}$ et, de plus, QJ, égal à la somme des rayons $OJ = \beta$ et $OQ = \lambda$, a pour longueur 2μ. On a, par suite, immédiatement, dans les triangles OPH, IPM, JQM, les relations

$$(6) \qquad OH = \lambda \sin\varphi, \qquad PH = \lambda \cos\varphi,$$

$$(7) \qquad MI = 2\gamma \sin\varphi, \qquad MP = 2\gamma \cos\varphi,$$

$$(8) \qquad MJ = 2\mu \sin\varphi, \qquad MQ = 2\mu \cos\varphi.$$

Le point M divisant PQ dans un rapport constant $\left(\text{égal à } \frac{\gamma}{\mu}\right)$ et les normales aux lieux décrits par P et Q coupant en I et J la normale à l'enveloppe de PQ, dont C est le centre de courbure, on sait que C divise IJ dans le même rapport que M divise PQ; autrement dit,

$$\frac{MC - MI}{MJ - MC} = \frac{MP}{MQ},$$

ou, en représentant par r le rayon de courbure MC,

$$r = \frac{MI.MQ + MJ.MP}{2\,PH},$$

c'est-à-dire, d'après (6), (7), (8),

$$(9) \qquad r = \frac{4\gamma\mu}{\lambda} \sin\varphi.$$

ou encore, en vertu de (6),

$$(9\ bis) \qquad r = \frac{4\gamma\mu}{\lambda^2} p.$$

Cette formule subsiste, bien entendu, pour une $\mathcal{H}$ à cette seule différence près que O et C sont alors de part et d'autre de la tangente PQ au lieu d'être du même côté.

Si l'on met en évidence l'indice $n = \frac{\beta}{\gamma}$ dans le coefficient de p de la dernière formule écrite, on voit qu'elle devient

$$r = \frac{4(n+1)}{(n+2)^2} p \qquad \text{pour une } \mathcal{E},$$

$$r = \frac{4(n-1)}{(n-2)^2} p \qquad \text{pour une } \mathcal{H}.$$

Sous cette forme, on voit que *le rapport* $\frac{r}{p}$ *n'est entier pour aucune valeur entière de n dans le cas d'une* $\mathcal{E}_n$, *et qu'il ne l'est, dans le cas d'une* $\mathcal{H}_n$ *que pour* $n = 3$ *et* $n = 4$. On voit aussi que *ce rapport n'est égal à* 1 *pour aucune* $\mathcal{E}$, *et qu'il l'est pour une* $\mathcal{H}$ *lorsque n est racine de*

$$n^2 - 8n + 8 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque

$$n = 2(2 \pm \sqrt{2}),$$

auquel cas il est facile de voir que *le diamètre* 2γ *du cercle* $\mathcal{G}$ *est égal à la flèche d'un arc sous-tendu dans le cercle* $\mathfrak{B}$ *par un côté du carré inscrit.*

En tout sommet B, on a $p = \lambda$ et, par suite, il vient, pour la valeur du rayon de courbure r_1 en ce sommet,

$$(10) \qquad r_1 = \frac{4\gamma\mu}{\lambda}.$$

Comme précédemment, on peut mettre cette expression sous la forme

$$r_1 = \frac{4(n+1)}{n+2}\gamma \qquad \text{pour une } \mathcal{E},$$

$$r_1 = \frac{4(n-1)}{(n-2)}\gamma \qquad \text{pour une } \mathcal{H},$$

et l'on voit ainsi que *le rapport du rayon de courbure r_1 au sommet au rayon γ du cercle générateur n'est entier, pour une valeur entière de n, que pour les courbes $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$. Il est égal à* 1 *pour la courbe $\mathcal{H}$ correspondant à $n = \frac{2}{3}$.*

4. Passons à la rectification de la courbe. L'élément d'arc en est donné par

$$ds = r\,d\theta$$

ou, d'après (9), (3) et (4),

$$ds = \frac{4\gamma\mu}{\beta}\sin\varphi\,d\varphi.$$

Il en résulte, si l'on intègre entre M et le sommet B où $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et qu'on représente par s l'arc BM, que

$$s = \frac{4\gamma\mu}{\beta}\cos\varphi. \tag{11}$$

Rapprochant cette formule de la seconde (7), on voit qu'on peut aussi l'écrire, en posant MP $= t$,

$$s = \frac{2\mu}{\beta}t. \tag{11 bis}$$

La formule (11) peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{2}{s} = \frac{\beta}{2\gamma\mu\cos\varphi},$$

ou, si l'on y remplace β par sa valeur $\mu - \gamma$ [1],

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{2\gamma\cos\varphi} - \frac{1}{2\mu\cos\varphi},$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{MP} - \frac{1}{MQ}.$$

Il suit de là que, *si* U *est le conjugué harmonique de* M *par rapport à* P *et* Q, *on a*

$$\text{arc}\,BM = MU,$$

et conséquemment que *le point* U *décrit la développante de l'épicycloïde qui part du sommet* B.

Il est facile de reconnaître la nature de cette développante. En effet, de ce que $PU = MU - MP$ on déduit immédiatement, eu égard aux formules (11) et (7), que

$$PU = \frac{2\gamma\lambda}{\beta}\cos\varphi.$$

Si donc la tangente à la développante, perpendiculaire en U à PU, coupe OP en W, on a

$$PW = \frac{2\gamma\lambda}{\beta}.$$

Le lieu de W est donc un cercle de centre O, et comme les angles $BOW = \omega'$ et $OWU = \varphi'$ sont liés par la relation (4 *bis*) identique à celle (4) qui lie ω

---

[1] Dans le cas d'une $\mathcal{H}$, on aurait

$$\beta = \mu + \gamma$$

et, par suite,

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ},$$

mais comme le point M serait alors en dehors du segment PQ, cette égalité définirait bien encore le conjugué harmonique de ce point par rapport à P et Q.

et φ, on voit que *la développante, enveloppe de* UW, *est une épicycloïde de même indice que l'épicycloïde donnée, mais ayant pour cercle base le cercle limite de celle-ci.* C'est un théorème bien connu.

Si l'on en rapproche la remarque faite ci-dessus relativement au point U, on voit que *le centre de courbure en un point d'une épi- ou hypocycloïde est le conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux points où la normale rencontre le cercle base.*

L'arc complet de l'épicycloïde d'abord considérée étant le double de l'arc AB, et le segment t étant pour le point A égal à 2γ, la formule (11 *bis*) donne immédiatement, pour la longueur s_c de cet arc complet, l'expression

$$s_c = \frac{8\mu\gamma}{\beta}. \tag{12}$$

Si la courbe est algébrique, sa longueur totale s_t est donnée par ns_c, n étant le nombre des arcs complets, égal à $\frac{\beta}{\gamma}$; donc

$$s_t = 8\mu, \tag{13}$$

c'est-à-dire que *la longueur totale d'une $\mathcal{E}_n$ ou d'une $\mathcal{H}_n$ algébrique est égale au périmètre du carré circonscrit à son cercle moyen.*

L'élimination de φ entre (9) et (11) donne immédiatement

$$\lambda^2 r^2 + \beta^2 s^2 = 16\gamma^2\mu^2, \tag{14}$$

qui est l'*équation intrinsèque d'un arc complet d'épi- ou hypocycloïde.*

La loi de rectification que définit la formule (11 *bis*) est intéressante à la fois par son extrême simplicité et

son entière généralité. Il se peut toutefois que, pour certaines $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$ particulières, on puisse rencontrer d'autres lois de rectification non moins simples. En voici un exemple :

D'une manière générale, on a

$$MT = PT - PM = \lambda \frac{\sin\omega}{\sin\theta} - 2\gamma\cos\varphi$$

et

$$\text{arc}\,MA = \text{arc}\,AB - \text{arc}\,BM = \frac{4\mu\gamma}{\beta}(1 - \cos\varphi),$$

et la relation entre ces deux longueurs n'est généralement pas simple; mais dans le cas d'une $\mathcal{H}_4$, définie par $\beta = 4\gamma$, ce qui donne $\mu = 3\gamma$ et $\lambda = 2\gamma$, on a, d'après (3), $\omega = \theta$, et les deux formules précédentes deviennent

$$MT = 2\gamma(1 - \cos\varphi),$$
$$\text{arc}\,MA = 3\gamma(1 - \cos\varphi).$$

Par suite, pour une telle courbe,

$$\text{arc}\,MA = \frac{3}{2}MT.$$

Remarquons que, si A′ est le second point de rebroussement limitant l'arc complet auquel appartient M et si la tangente en M coupe de même en T′ la tangente en A′, on aurait de même

$$\text{arc}\,MA' = \frac{3}{2}MT'.$$

En somme,

$$\frac{\text{arc}\,MA}{MT} = \frac{\text{arc}\,MA'}{MT'} = \frac{\text{arc}\,AA'}{TT'} = \frac{3}{2}.$$

Cela établit ce fait bien connu que *le segment* TT′ *de la tangente à la* $\mathcal{H}_4$ *est constant*, mais, en outre, que *le point* M *divise dans le même rapport l'arc* AA′ *et le segment* TT′ *de la tangente.*

5. L'élément d'aire $d\sigma$, balayé par le segment MP de la tangente, est donné par

$$d\sigma = \frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{2} d\theta,$$

ou, d'après (7), (3) et (4),

$$d\sigma = 2\frac{\lambda\gamma^2}{\beta}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda\gamma^2}{\beta}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Intégrant de φ à $\frac{\pi}{2}$ pour avoir l'aire σ limitée aux arcs BM et BP, on a immédiatement

$$(15) \qquad \sigma = \frac{\lambda}{\beta}\left[\frac{\gamma^2(\pi - 2\varphi)}{2} - \frac{\gamma^2 \sin 2\varphi}{2}\right],$$

ou, si l'on remarque que l'expression entre crochets n'est autre que l'*aire u du segment* MNP *du cercle* $\mathcal{G}$,

$$(15\,bis) \qquad \sigma = \frac{\lambda}{\beta} u.$$

Il résulte immédiatement de là que l'*aire du demi-segment complémentaire* $\mathrm{ABP_0}$ *est égale au produit par* $\frac{\lambda}{\beta}$ *de celle du demi-cercle* $\mathcal{G}$. Si donc σ_0 désigne l'aire du segment complémentaire, on a

$$(16) \qquad \sigma_0 = \frac{\lambda}{\beta}\pi\gamma^2$$

ou, si l'on tient compte de la valeur (5) de l'angle au centre Ω du secteur complet,

$$(16\,bis) \qquad \sigma_0 = \frac{\Omega}{2}\lambda\gamma.$$

Par suite, l'aire σ_1 du segment complet sera

$$\sigma_1 = \frac{\Omega}{2}(\lambda^2 - \beta^2 - \lambda\gamma)$$

ou

$$\sigma_1 = \frac{\Omega}{2}(\lambda\mu - \beta^2). \tag{17}$$

Pour une $\mathcal{H}$, il suffit de changer le signe du second membre. On peut encore écrire cette formule

$$\sigma_1 = \frac{\pi\gamma^2(3\beta \pm 2\gamma)}{\beta}, \tag{17 bis}$$

le signe + s'appliquant à une $\mathcal{E}$, le signe — à une $\mathcal{H}$.

L'aire du secteur complet égale à $\frac{\Omega\beta^2}{2} + \sigma_1$ pour une $\mathcal{E}$ et à $\frac{\Omega\beta^2}{2} - \sigma_1$ pour une $\mathcal{H}$, est donnée dans les deux cas par

$$\sigma_c = \frac{\Omega}{2}\lambda\mu. \tag{18}$$

Puisque Ω est l'angle au centre du secteur, on voit que *si l'on considère le cercle* Σ *de centre* O *dont le rayon est égal à* $\sqrt{\lambda\mu}$, *c'est-à-dire celui qui coupe orthogonalement tous les cercles inscrits dans la couronne comprise entre les cercles* $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{M}$, *le second membre de* (18) *représente l'aire du secteur de ce cercle* Σ *compris entre les mêmes rayons* OA *et* OA'.

L'égalité de ce secteur épicycloïdal et de ce secteur circulaire entraîne, sur la figure, l'équivalence des aires des deux triangles mixtilignes couverts de hachures.

De là résulte immédiatement aussi que, s'il s'agit d'une $\mathcal{E}_n$ ou d'une $\mathcal{H}_n$, son aire totale, égale à celle du cercle Σ, est donnée par

$$\sigma_t = \pi\lambda\mu. \tag{19}$$

On peut encore dire que l'*aire totale est la moyenne géométrique entre les aires des cercles* $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{M}$.

Si enfin nous représentons par τ l'aire comprise entre un arc de la courbe, les normales en ses extrémités et l'arc correspondant de la développée, nous avons

$$d\tau = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

ou, eu égard à (9), (3) et (4),

$$d\tau = \frac{8\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{4\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta}(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Si donc on intègre à partir du rebroussement A où $\varphi = 0$, on a

$$(20) \qquad \tau = \frac{4\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right),$$

et il vient pour l'aire totale comprise entre un arc complet ABA′ de la courbe et l'arc correspondant ADA′ de la développée

$$(21) \qquad \tau_c = \frac{4\pi\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta}.$$

La formule (20) peut s'interpréter géométriquement de façon analogue à (15). On voit, en effet, tout de suite que, si u' est l'aire du petit segment détaché dans le cercle $\mathcal{G}$ par la corde IM, on a

$$(20\ bis) \qquad \tau = \frac{4\mu^2}{\lambda\beta} u'.$$

6. A titre d'exemples, nous allons indiquer ce que deviennent les formules précédentes dans le cas des quatre courbes particulières citées dans l'avant-dernier alinéa du n° 1, en rappelant que :

p désigne la distance OH du centre à la tangente;
t, le segment MP de cette tangente;

r, le rayon de courbure MC en M;
r_1, le rayon de courbure en chaque sommet;
s, l'arc BM de la courbe, compté à partir du sommet B;
s_t, la longueur totale de la courbe;
σ, l'aire BMP;
u, le segment MNP du cercle $\mathcal{G}$;
σ_0, l'aire du segment complémentaire (double de BAP_0);
σ_1, l'aire du segment complet ABA';
σ_t, l'aire totale;
τ_c, l'aire comprise entre un arc complet ABA' et l'arc correspondant ADA' de la développée.

Épicycloïde $\mathcal{E}_1$ (cardioïde).

$$\gamma = \beta, \qquad \lambda = 3\beta, \qquad \mu = 2\beta,$$

$$r = \frac{8p}{9}, \qquad r_1 = \frac{8\beta}{3} = \frac{8\gamma}{3} = \frac{8\lambda}{9} = \frac{4\mu}{3},$$

$$s = 4t, \qquad s_t = 16\beta = 16\gamma = \frac{16\lambda}{3} = 8\mu.$$

$$9r^2 + s^2 = 64\beta^2 = 64\gamma^2 = \frac{64\lambda^2}{9} = 16\mu^2, \qquad \sigma = 3u,$$

$$\sigma_0 = 3\pi\beta^2 = 3\pi\gamma^2 = \frac{\pi\lambda^2}{3} = \frac{3\pi\mu^2}{4},$$

$$\sigma_1 = 5\pi\beta^2 = 5\pi\gamma^2 = \frac{5\pi\lambda^2}{9} = \frac{5\pi\mu^2}{4},$$

$$\sigma_t = 6\pi\beta^2 = 6\pi\gamma^2 = \frac{2\pi\lambda^2}{3} = \frac{3\pi\mu^2}{2},$$

$$\tau_c = \frac{16\pi\beta^2}{3} = \frac{16\pi\gamma^2}{3} = \frac{16\pi\lambda^2}{27} = \frac{4\pi\mu^2}{3}.$$

Épicycloïde $\mathcal{E}_2$ (néphroïde).

$$\gamma = \frac{\beta}{2}, \qquad \lambda = 2\beta, \qquad \mu = \frac{3\beta}{2},$$

$$r = \frac{3p}{4}, \qquad r_1 = \frac{3\beta}{2} = 3\gamma = \frac{3\lambda}{4} = \mu,$$

$$s = 3t, \qquad s_t = 12\beta = 24\gamma = 6\lambda = 8\mu.$$

$$4r^2 + s^2 = 9\beta^2 = 36\gamma^2 = \frac{9\lambda^2}{4} = 4\mu^2, \qquad \sigma = 2u,$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi\beta^2}{2} = 2\pi\gamma^2 = \frac{\pi\lambda^2}{8} = \frac{2\pi\mu^2}{9},$$

$$\sigma_1 = \pi\beta^2 = 4\pi\gamma^2 = \frac{\pi\lambda^2}{4} = \frac{4\pi\mu^2}{9},$$

$$\sigma_t = 3\pi\beta^2 = 12\pi\gamma^2 = \frac{3\pi\lambda^2}{4} = \frac{4\pi\mu^2}{3},$$

$$\tau_c = \frac{9\pi\beta^2}{8} = \frac{9\pi\gamma^2}{2} = \frac{9\pi\lambda^2}{32} = \frac{\pi\mu^2}{2}.$$

Hypocycloïde $\mathcal{H}_3$.

$$\gamma = \frac{\beta}{3}, \qquad \lambda = \frac{\beta}{3}, \qquad \mu = \frac{2\beta}{3},$$

$$r = 8p, \qquad r_1 = \frac{8\beta}{3} = 8\gamma = 8\lambda = 4\mu,$$

$$s = \frac{4t}{3}, \qquad s_t = \frac{16\beta}{3} = 16\gamma = 16\lambda = 8\mu.$$

$$r^2 + 9s^2 = \frac{64\beta^2}{9} = 64\gamma^2 = 64\lambda^2 = 16\mu^2, \qquad \sigma = \frac{u}{3},$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi\beta^2}{27} = \frac{\pi\gamma^2}{3} = \frac{\pi\lambda^2}{3} = \frac{\pi\mu^2}{12},$$

$$\sigma_1 = \frac{7\pi\beta^2}{27} = \frac{7\pi\gamma^2}{3} = \frac{7\pi\lambda^2}{3} = \frac{7\pi\mu^2}{12},$$

$$\sigma_t = \frac{2\pi\beta^2}{9} = 2\pi\gamma^2 = 2\pi\lambda^2 = \frac{\pi\mu^2}{2},$$

$$\tau_c = \frac{16\pi\beta^2}{27} = \frac{16\pi\gamma^2}{3} = \frac{16\pi\lambda^2}{3} = \frac{4\pi\mu^2}{3}.$$

Hypocycloïde $\mathcal{H}_4$ (*astroïde*).

$$\gamma = \frac{\beta}{4}, \qquad \lambda = \frac{\beta}{2}, \qquad \mu = \frac{3\beta}{4},$$

$$r = 3p, \qquad r_1 = \frac{3\beta}{2} = 6\gamma = 3\lambda = 2\mu,$$

$$s = \frac{3t}{2}, \qquad s_t = 6\beta = 24\gamma = 12\lambda = 8\mu.$$

$$r^2 + 4s^2 = \frac{9\beta^2}{4} = 36\gamma^2 = 9\lambda^2 = 4\mu^2, \qquad \sigma = \frac{u}{2},$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi\beta^2}{32} = \frac{\pi\gamma^2}{2} = \frac{\pi\beta^2}{8} = \frac{\pi\mu^2}{18},$$

$$\sigma_1 = \frac{5\pi\beta^2}{32} = \frac{5\pi\gamma^2}{2} = \frac{5\pi\beta^2}{8} = \frac{5\pi\mu^2}{18},$$

$$\sigma_t = \frac{3\pi\beta^2}{8} = 6\pi\gamma^2 = \frac{3\pi\lambda^2}{2} = \frac{2\pi\mu^2}{3},$$

$$\tau_c = \frac{9\pi\beta^2}{32} = \frac{9\pi\gamma^2}{2} = \frac{9\pi\lambda^2}{8} = \frac{\pi\mu^2}{2}.$$

Le seul examen de ce Tableau suggère diverses remarques telles que celles-ci :

Pour un même cercle base, la grandeur du rayon de courbure au sommet est la même pour la cardioïde et la $\mathcal{H}_3$; *elle est aussi la même pour la néphroïde et l'astroïde; la longueur de la cardioïde est triple de celle de la* $\mathcal{H}_3$; *la longueur de la néphroïde est double de celle de l'astroïde; l'aire de la cardioïde est double de celle de la néphroïde, etc.*

Pour un même cercle générateur, la cardioïde et la $\mathcal{H}_3$ *d'une part, la néphroïde et l'astroïde de l'autre ont même longueur; la cardioïde et l'astroïde ont même aire, la néphroïde a une aire double, la* $\mathcal{H}_3$ *a une aire trois fois plus petite, l'aire entre arc complet et développée est la même pour la cardioïde et la* $\mathcal{H}_3$, *la même pour la néphroïde et l'astroïde, etc.*

Pour un même cercle limite, la longueur de la cardioïde est le tiers de celle de la $\mathcal{H}_3$, *la longueur de la néphroïde est la moitié de celle de l'astroïde; l'aire de la cardioïde est le tiers de celle de la* $\mathcal{H}_3$, *l'aire de la néphroïde est la moitié de celle de l'astroïde, etc.*

Pour un même cercle moyen, nous savons déjà par la formule (13) que *toutes ces courbes ont même longueur*, ceci étant vrai pour une $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$ quelconque admettant ce cercle moyen, mais, en outre, on voit que *l'aire de la cardioïde est le triple de celle de la* $\mathcal{H}_3$, *l'aire de la néphroïde double de celle de l'astroïde, l'aire entre arc complet et développée est la même pour la cardioïde et la* $\mathcal{H}_3$, *la même pour la néphroïde et l'astroïde, etc.*

On peut obtenir de cette façon un grand nombre de propositions particulières.

Remarquons aussi qu'on peut, des formules ci-dessus établies, en déduire d'autres applicables à la cycloïde en regardant celle-ci comme la limite d'une épi- ou hypocycloïde pour laquelle, γ conservant une valeur fixe, β, λ et μ tendent vers l'infini, alors que leurs mutuels rapports tendent vers l'unité.

On voit ainsi qu'à la limite :

La formule	(9)	donne.....	$r = 4\gamma \sin\varphi = 2\mathrm{MI}$
»	(10)	»	$r_1 = 4\gamma$
»	(11 *bis*)	»	$s = 2t$
»	(12)	»	$s_t = 8\gamma$
»	(14)	»	$r^2 + s^2 = 16\gamma^2$
»	(15 *bis*)	»	$\sigma = u$
»	(16)	»	$\sigma_0 = \pi\gamma^2$
»	(17 *bis*)	»	$\sigma_1 = 3\pi\gamma^2$
»	(20 *bis*)	»	$\tau = 4u'$
»	(21)	»	$\tau_c = 4\pi\gamma^2$

On reconnaît là des propriétés classiques de la cycloïde.

7. La considération des quatre cercles $\mathcal{G}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{M}$ conduit à trois modes d'association entre les $\mathcal{E}$ et les $\mathcal{H}$ qui méritent d'être signalés.

Lorsqu'on se donne deux des trois derniers parmi ces cercles, le troisième ainsi que $\mathcal{G}$ sont déterminés sans ambiguïté et, par suite, on se trouve avoir défini une, et une seule, $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{H}$.

Mais, si l'on se donne le cercle $\mathcal{G}$ et l'un des trois derniers, on peut disposer du sens dans lequel on fait croître ou décroître le rayon de celui-ci pour obtenir les rayons des deux autres et, par suite, on se trouve avoir défini à la fois une $\mathcal{E}$ et une $\mathcal{H}$, et ce sont ces deux courbes qui seront dites *associées* par leur cercle de base, leur cercle limite ou leur cercle moyen.

Si le rayon choisi pour le cercle $\mathcal{G}$ est une partie aliquote du rayon du cercle $\mathfrak{B}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathfrak{M}$ qu'on se donne, cette $\mathcal{E}$ et cette $\mathcal{H}$ associées sont algébriques; mais, ici, il convient de préciser davantage :

1° Si l'association se fait par le cercle $\mathfrak{B}$ et que $\gamma = \frac{\beta}{n}$, les courbes associées sont $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{H}_n$.

2° Si l'association se fait par le cercle $\mathcal{L}$ et que $\gamma = \frac{\lambda}{n}$, on a

$$\beta = (n-2)\gamma, \qquad \beta' = (n+2)\gamma,$$

et, par suite, les courbes associées sont $\mathcal{E}_{n-2}$ et $\mathcal{H}_{n+2}$.

3° Enfin si l'association se fait par le cercle $\mathfrak{M}$ et que $\gamma = \frac{\mu}{n}$, on a

$$\beta = (n-1)\gamma, \qquad \beta' = (n+1)\gamma,$$

et les courbes associées sont $\mathcal{E}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_{n+1}$.

On peut d'ailleurs regarder comme correspondants de l'une à l'autre courbe associée les points M et M′ ainsi définis : plaçant, à l'origine, les points décrivants sur un même rayon issu de O, on fait rouler les cercles générateurs, à partir de cette position, sur les cercles

correspondants de façon que les rayons unissant le centre O au centre de chaque cercle générateur tournent dans le même sens. Dès lors, les positions M et M′ des points décrivants seront dites *correspondantes* lorsqu'elles répondront à des rotations égales des cercles générateurs autour de leurs centres respectifs, autrement dit, lorsque les arcs MI et M′I′, comptés à partir des points de contact I et I′ avec les cercles bases, seront égaux. Dans ces conditions, en deux points correspondants des courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ associées, les quantités que nous avons appelées φ, t, u sont les mêmes. Tenant compte de l'identité de ces éléments dans les formules précédentes on en déduit des relations entre éléments correspondants des courbes associées.

Nous allons en donner quelques exemples :

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse d'une $\mathcal{E}$ et d'une $\mathcal{H}$ associées par le cercle $\mathfrak{W}$ (¹). Ici, par exemple, la formule (11 *bis*) donne (puisque β et t ont même valeur aux deux points correspondants)

$$\frac{s}{s'} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma},$$

de même la formule (15 *bis*)

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\beta + 2\gamma}{\beta - 2\gamma},$$

et la formule (17 *bis*)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma'_1} = \frac{3\beta + 2\gamma}{3\beta - 2\gamma}.$$

(¹) C'est à ce mode d'association que nous avons consacré récemment une Note spéciale dans les *Nouvelles Annales* (1915, p. 433). On y trouvera la première et la troisième des formules ici données [formules (4), p. 437, et (6), p. 439].

Supposons maintenant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ associées par le cercle $\mathcal{L}$. Ici la formule (15 *bis*) donnera

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\lambda + 2\gamma}{\lambda - 2\gamma},$$

et la formule (19)

$$\frac{\sigma_t}{\sigma'_t} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma}.$$

Prenons enfin le cas où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ sont associées par le cercle $\mathcal{M}$. Dans ce cas, on a

$$\beta = \lambda' = \mu - \lambda, \qquad \beta' = \lambda = \mu + \gamma.$$

La formule (11 *bis*) donne alors

$$\frac{s}{s'} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\mu + \gamma}{\mu - \gamma},$$

et (13), comme nous le savons déjà,

$$s_t = s'_t.$$

En outre, la formule (14) donne lieu à une remarque curieuse; elle montre, en effet, qu'on a, entre deux couples quelconques de valeurs de r et s, d'une part, de r' et s', de l'autre, la relation

$$(\mu + \gamma)^2 r^2 + (\mu - \gamma)^2 s^2 = (\mu - \gamma)^2 r'^2 + (\mu + \gamma)^2 s'^2.$$

Cela établit, entre les rayons de courbure et les arcs des deux courbes associées, la loi de réciprocité que voici : *les arcs s et s' étant comptés à partir des sommets respectifs de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$, si l'on prend sur l'une de ces courbes un arc s égal à l'un des rayons de courbure r' de l'autre, le rayon de courbure r est égal à l'arc s'.*

On peut encore dire que, *si l'on fait rouler sur une droite les arcs complets des courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ associées, de façon à faire coïncider les milieux des arcs développés, les lieux engendrés par les centres*

de courbure répondant aux points de contact sont, dans les deux cas, des ellipses qui ne diffèrent entre elles que par une rotation d'un angle droit autour de leur centre commun.

En particulier, on voit, en faisant $n = 2$ dans le 3° ci-dessus, qu'une telle relation a lieu entre la cardioïde et la $\mathfrak{H}_3$ ayant même cercle moyen.

Enfin, la formule (19) donne ici

$$\frac{\sigma_t}{\sigma'_t} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu + \gamma}{\mu - \gamma}.$$

Ces quelques exemples suffiront à mettre en évidence le genre des relations existant entre éléments homologues d'une épi- et d'une hypocycloïde associées suivant l'un des modes qui viennent d'être indiqués.

[K¹2d]

SUR LES CERCLES PODAIRES ET ISOPODAIRES D'UN POINT PAR RAPPORT A UN TRIANGLE;

PAR M. R. BOUVAIST.

Étant donnée une conique Σ de foyers réels F_1 et F_2, on sait que le lieu des points M_1 et M_2 d'intersection d'une tangente variable à Σ avec les droites F_1M_1, F_2M_2 également inclinées sur cette tangente d'un angle V est un cercle ayant son centre sur la perpendiculaire au milieu de F_1F_2 et ayant pour rayon le quotient de la longueur du demi-axe focal de Σ par sin V. On en conclut immédiatement que :

Si, par deux points inverses F_1 et F_2 d'un triangle

ABC, on mène les droites $F_1\alpha$, $F_1\beta$, $F_1\gamma$, $F_2\alpha'$, $F_2\beta'$, $F_2\gamma'$ également inclinées sur les côtés BC, CA, AB, les six points α, β, γ, α', β', γ' sont concycliques. Nous désignerons le cercle α, β, γ sous le nom de *cercle isopodaire* du point F_1 par rapport au triangle ABC, l'inclinaison de $F_1\alpha$ sur BC étant donnée.

On connaît le théorème suivant (*Nouv. Ann.*, 1914, p. 218) : *Les axes radicaux des cercles podaires des points d'une droite* Δ *par rapport à un triangle* ABC *passent par un point fixe* ω *ou, en d'autres termes, ces cercles sont orthogonaux à un cercle fixe de centre* ω.

Je me propose de montrer que ce théorème ne s'étend pas aux cercles isopodaires des points de Δ par rapport à ABC.

Désignons par V, l'angle constant que font les droites $F_1\alpha$, $F_1\beta$, $F_1\gamma$ issues d'un point F_1 de Δ avec les hauteurs de ABC si (α, β, γ) sont les coordonnées de F_1, on voit aisément que, en coordonnées trilinéaires normales, le triangle ABC étant le triangle de référence, le cercle isopodaire de F_1 a pour équation, si l'on pose

$$\Delta = ax + by + cz, \qquad \Delta\alpha = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$
$$C = ayz + bxz + cxy, \qquad C\alpha = a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta,$$

$$\begin{aligned}\Delta\alpha C\alpha C = abc\,\Delta\Big[&\frac{x}{a}\alpha(\gamma + \beta\cos A + \beta\sin A\tan V)\\ &\times(\beta + \gamma\cos A - \gamma\sin A\tan V)\\ &+\frac{y}{b}\beta(\alpha + \gamma\cos B + \gamma\sin B\tan V)\\ &\times(\gamma + \alpha\cos B - \alpha\sin B\tan V)\\ &+\frac{z}{c}\gamma(\beta + \alpha\cos C + \alpha\sin C\tan V)\\ &\times(\alpha + \beta\cos C - \beta\sin C\tan V)\Big] = 0.\end{aligned}$$

Si nous désignons par $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les

coordonnées des points d'intersection de Δ avec le cercle ABC nous pouvons poser

$$\alpha = \alpha_1 + \lambda\alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 + \lambda\beta_2, \qquad \gamma = \gamma_1 + \lambda\gamma_2;$$

d'où

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \lambda\Delta\alpha^2,$$

$$C\alpha = \lambda[a(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) + b(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1) - c(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)] = \lambda K,$$

l'équation du cercle isopodaire de F_1 devient

$$\lambda K(\Delta\alpha_1 + \lambda\Delta\alpha_2)C - abc\,\Delta[\lambda^3 D_3 + \lambda^2 D_2 + \lambda D_1 + D_0] = 0,$$

équation qui définit un système de cercles du troisième ordre, se décomposant en la droite de l'infini et en une droite pour $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = -\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta\alpha_2}$, les trois droites correspondantes étant les droites de Simson généralisées, relatives à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, des points d'intersection de Δ et du cercle ABC, et du point inverse du point à l'infini sur Δ.

Pour que le théorème énoncé soit vérifié, il faut que les trois droites qui ont respectivement pour équations $D_0 = 0$, $D_3 = 0$, $\Delta\alpha_1 D_2 - \Delta\beta_2 D_1 = 0$ soient concourantes. Si d'ailleurs ces trois droites sont concourantes la puissance du point de rencontre ω de $D_0 = 0$ et $D_3 = 0$ par rapport au cercle isopodaire a l'expression

$$\frac{C}{abc} - \Delta\frac{\lambda D_2 - D_1}{\lambda\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1},$$

quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point ω, c'est-à-dire puisqu'on a

$$\frac{D_2}{\Delta\alpha_2} = \frac{D_1}{\Delta\alpha_1},$$

à l'expression

$$\frac{C}{abc} - \Delta\frac{D_1}{\Delta\alpha_1},$$

expression constante, qui montre que les cercles isopodaires sont orthogonaux à un cercle fixe de centre ω.

Or, si nous désignons par D et E les intersections de Δ avec le cercle ABC, on sait que les droites de Simson généralisées relatives à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, de D et E par rapport au triangle ABC, se coupent lorsque la droite DE se déplace parallèlement à elle-même sur la droite de Simson généralisée relative à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, d'un point F du cercle ABC, défini comme il suit : AA′ désignant par exemple la bissectrice intérieure de l'angle A, la parallèle AX à DE menée par A, et la droite AF, font avec AA′ de part et d'autre de cette droite les angles $\widehat{XAA'} = u$, $\widehat{A'AF} = u - 2V$. Les deux directions AX et AF ne seront donc inverses, c'est-à-dire les droites $D_0 = 0$, $D_3 = 0$, $\Delta\alpha_1 D_2 - \Delta\alpha_2 D_1 = 0$ ne sont concourantes que si $V = 0$. Le théorème énoncé ne s'applique donc qu'aux cercles podaires des divers points de Δ et non aux cercles isopodaires. [*Voir*, en ce qui concerne les propriétés de trois droites de Simson concourantes, l'étude de M. Lemaire sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (*Nouv. Ann.*, 1914, p. 49 et 113).]

Le théorème relatif aux cercles podaires peut d'ailleurs se démontrer très facilement géométriquement comme il suit (je crois qu'aucune démonstration n'en a encore été donnée dans les *Nouvelles Annales*).

Soit, en effet, P un point de la droite Δ, la perpendiculaire à Δ en ce point coupe BC en α, AC en β, il existe trois coniques inscrites dans ABC, tangentes à $P\alpha\beta$ et ayant un de leur foyer sur Δ. Soient F_1, F_2, F_3 ces foyers, les cercles podaires de ces trois points par

rapport à ABC passeront par P, et l'axe radical de ces trois cercles sera la perpendiculaire abaissée de P sur la droite de Newton du quadrilatère $AB\alpha\beta$. Lorsque P varie sur Δ, cette droite de Newton enveloppe visiblement une parabole inscrite dans le triangle $A'B'C'$ (A', B', C' étant les milieux de BC, CA, AB) et ayant son axe perpendiculaire à Δ. $A\alpha$ coupe $B'C'$ en α', $B\beta$ coupe $A'C'$ en β', $\alpha'\beta'$, droite de Newton du quadrilatère $AB\alpha\beta$, coupe $P\alpha\beta$ en Q, Q est le point où elle touche son enveloppe, la perpendiculaire abaissée de P sur $\alpha'\beta'$ coupe l'axe de la parabole enveloppe en R, si cet axe coupe Δ en S, le segment RS est constant et égal au paramètre de la parabole, le point R est donc fixe, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — On voit facilement que l'axe de la parabole considérée n'est autre que la droite de Simson du point inverse du point à l'infini sur Δ, et que, si des sommets A, B, C on abaisse des perpendiculaires AA_1, BB_1, CC_1 sur Δ, les perpendiculaires abaissées de A_1, B_1, C_1 sur BC, CA, AB concourent au point R.

Théorème. — *Étant donnée une conique* Σ, *un point fixe* P *sur cette conique*, ABC *un triangle quelconque inscrit dans* Σ, *les cercles isopodaires de* P (*relatifs à un même angle* V) *passent par un point fixe* R, *quel que soit le triangle* ABC.

En effet, il existe une conique S inscrite dans ABC et ayant pour foyer le point P. les droites isotropes de P interceptent dans Σ une corde Δ qui est tangente à S; l'isocline d'un angle V, menée sur Δ par P coupe Δ en R, point fixe qui appartient au cercle isopodaire de P par rapport à ABC. Δ est du reste la polaire du point de Frégier de P, par rapport à Σ.

Remarque. — Si Σ est une hyperbole équilatère et si l'angle V est droit, on voit que le cercle podaire d'un point de cette hyperbole par rapport à un triangle inscrit passe par le centre de la courbe, propriété bien connue, qui conduit immédiatement au théorème de Feuerbach : En effet, soient ABC un triangle, P et P′ deux points inverses, le cercle podaire de P et P′ coupe le cercle des neuf points de ABC, en ω_1 et ω_2 centres des hyperboles équilatères ABCP, ABCP′, si P et P′ sont confondus, au centre I d'un des cercles inscrits dans ABC, le cercle correspondant touche le cercle des neuf points au centre de l'hyperbole ABCI.

2° Le théorème précédent donne naissance à un grand nombre de théorèmes particuliers, en voici quelques-uns à titre d'exemple :

α. *Étant données une conique* S, *un point fixe* P, Q *un point variable de cette courbe*, MT *une tangente à* S *parallèle à la symétrique de* PQ *par rapport aux axes, la droite joignant les projections de* P *sur la tangente* MT *et la droite* MQ *joignant son point de contact au point* Q *passe par un point fixe.*

β. *Soient* P *un point d'une conique,* Q_1, Q_2, Q_3 *les trois points de cette courbe dont les cercles osculateurs passent en* P; P_1, P_2, P_3 *les projections de* P *sur les tangentes en* Q_1, Q_2, Q_3; M_1, M_2, M_3 *les milieux de* PP_1, PP_2, PP_3, *les perpendiculaires élevées en* P_1, P_2, P_3 *aux droites* P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 *et la droite de Simson de* P *par rapport au triangle* $P_1P_2P_3$ *sont concourantes.*

Théorème qui peut encore s'énoncer comme il suit :

Si l'on projette le point P, *quatrième point d'in-*

tersection du cercle des neuf points d'un triangle ABC, *avec la conique tangente aux côtés* BC, CA, AB *en leurs milieux* A′, B′, C′, *en* P_1, P_2, P_3 *sur* BC, CA, AB, *les perpendiculaires élevées en* P_1, P_2, P_3 *aux droites joignant ces points aux milieux des segments* PA′, PB′, PC′ *sont concourantes en un point de la droite de Simson de* P *par rapport au triangle* A′B′C′.

γ. *Une droite variable* Δ *coupe une cubique circulaire à point double en* P_1, P_2, P_3, *si* O *désigne le point double, les centres des cercles circonscrits aux triangles* OP_1P_2, OP_2P_3, OP_1P_3 *sont sur un cercle qui passe quelle que soit* Δ *par le point double* O *et le foyer singulier de la courbe.*

Remarque. — Nous avons vu que les cercles podaires des divers points de la droite Δ par rapport à un triangle ABC étaient orthogonaux à un cercle fixe dont le centre pouvait s'obtenir en prenant l'intersection de l'axe de la parabole inscrite dans le triangle A′B′C′ médian de ABC, et ayant son axe perpendiculaire à Δ, avec la perpendiculaire abaissée sur BC de la projection A_1 de A sur Δ, nous avons vu aussi que, S désignant l'intersection de l'axe de cette parabole avec Δ, le segment RS était égal au paramètre de ladite parabole. Si A'_1 désigne le symétrique de A_1 par rapport au côté B′C′ du triangle médian, la puissance de R par rapport aux divers cercles podaires est égale à $RA_1.RA'_1$, elle sera nulle si A'_1 coïncide avec R, ce qui exige visiblement que Δ soit la directrice de la parabole considérée.

On voit donc que : *Les cercles podaires d'un point quelconque d'un diamètre fixe du cercle circonscrit*

au triangle ABC *passent par un point fixe* ω, *foyer de la parabole inscrite dans le triangle* A'B'C' *médian de* ABC *admettant pour directrice ce diamètre, et centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à* ABC, *inverse du diamètre considéré.*

NOTE DE LA RÉDACTION

au sujet de la question 2277.

Le théorème qui fait l'objet de cette question, insérée dans le dernier numéro (p. 532), a été donné depuis longtemps par E. Genty (*N. A.*, 1883, p. 237-238).

Il a été rattaché par M. d'Ocagne (*N. A.*, 1883, p. 371-372) à une construction bien connue, que l'on doit à Mannheim.

M. d'Ocagne a encore donné une démonstration géométrique du même théorème au cours de *Remarques au sujet de la construction des centres de courbure des coniques*, publiées récemment par lui dans l'*Enseignement mathématique* (1915, p. 307-314). Dans cet article, un grand nombre de constructions analogues, déjà connues, sont ramenées à un point de départ unique d'où l'auteur les fait découler systématiquement. Celle dont il s'agit ici y figure au paragraphe V (p. 311).

La question 2277, résolue à l'avance, doit donc disparaître de la liste de celles qui sollicitent les efforts de nos lecteurs.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

585.

(1861, p. 140.)

Trois coniques étant données dans un même plan, il y a 20 points d'où elles sont vues sous le même angle ou sous des angles supplémentaires.

FAURE.

SOLUTION

Par un Abonné.

Soient

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0$$

les équations des trois coniques données;

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 0$$

celles de leurs cercles orthoptiques.

Désignons par Δ_1, Δ_2, Δ_3 les déterminants des trois coniques.

L'angle sous lequel on voit la conique $f_1 = 0$, d'un point (x, y) de son plan, est donné par la formule (SALMON, *Sect. con.*, p. 270).

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sqrt{-\Delta_1 f_1(x, y)}}{C_1}.$$

Par suite le lieu des points d'où l'on voit les coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ sous le même angle a pour équation

$$\Delta_1 f_1(x, y)\, C_2^2 - \Delta_2 f_2(x, y)\, C_1^2 = 0.$$

C'est une courbe du sixième degré qui admet les points cycliques comme points doubles. Elle touche les coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ aux points où elles sont respectivement coupées par leurs cercles orthoptiques.

De même, le lieu des points, d'où l'on voit sous le même angle les coniques $f_1 = 0$, $f_3 = 0$, est fourni par l'équation

$$\Delta_1 f_1(x, y)\, C_3^2 - \Delta_3 f_3(x, y)\, C_1^2 = 0.$$

Les deux courbes précédentes se coupent en trente-six points dont huit sont confondus avec les points cycliques et huit sur la conique $f_1 = 0$. Il en reste vingt qui répondent à la question.

1340.

(1879, p. 288.)

Déduire d'une même identité une infinité de solutions en nombres entiers de chacun des deux systèmes :

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} X^3 + Y^3 + Z^3 = T^3 + U^3 + V^3, \\ XYZ = TUV. \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} A^3 + B^3 + C^3 = D^3 + E^3 + F^3, \\ A + B + C = D + E + F. \end{cases}$$

DESBOVES.

SOLUTION

Par M. A. GERARDIN.

Plusieurs questions de ce genre proposées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* m'ont donné l'occasion d'obtenir, depuis plusieurs années, une infinité de solutions par une méthode absolument générale.

L'exposé de ces procédés a fait l'objet de plusieurs articles du Journal précité et du *Sphinx-Œdipe*, et je compte y revenir avec détails pour bien montrer la grande généralité de ma méthode universelle.

Voici d'abord quelques *identités* choisies parmi mes résultats généraux, en admettant des entiers négatifs :

$$X = p^2(p^3 - 2q^3); \qquad T = pq(p^3 - 2q^3);$$
$$Y = -pq(q^3 + 2p^3); \qquad U = -q^2(q^3 + 2p^3);$$
$$Z = q^2(p^3 - q^3); \qquad V = p^2(p^3 - q^3).$$

Exemple : $p = 2$, $q = 1$.

$$40^3 + 7^3 - 34^3 = 28^3 + 20^3 - 17^3,$$
$$-40.7.34 = -28.20.17.$$

Je citerai encore pour ce cas :

$$X = p(p^3 + q^3 - 2r^3); \qquad T = q(p^3 + q^3 - 2r^3);$$
$$Y = q(q^3 + r^3 - 2p^3); \qquad U = r(q^3 + r^3 - 2p^3);$$
$$Z = r(p^3 + r^3 - 2q^3); \qquad V = p(p^3 + r^3 - 2q^3).$$

Exemple : $p = 3$, $q = 2$, $r = 1$.

$$33^3 + 4^3 - 30^3 = 22^3 + 12^3 - 15^3,$$
$$-33.4.30 = -22.12.15.$$

J'ai obtenu de nombreuses identités de degrés divers, donnant des nombres positifs, avec certaines conditions de limites : ainsi, avec $3f^3 < g^3 < 9f^3$,

$$X = 9f^4 g(g^3 + 9f^3); \qquad T = 3fg^4(3f^3 + g^3);$$
$$Y = -9f^2(3f^3 + g^3)(3f^3 - g^3); \qquad U = -27f^5(3f^3 - g^3);$$
$$Z = g^5(9f^3 - g^3); \qquad V = g^2(g^3 + 9f^3)(9f^3 - g^3);$$

conséquence de mes résultats de 1906.

Exemple : $f = 1$, $g = 2$.

$$495^3 + 306^3 + 32^3 = 528^3 + 135^3 + 68^3,$$
$$495.306.32 = 528.135.68.$$

Enfin, la *méthode visuelle* m'a indiqué le procédé suivant, qui répond entièrement à la demande de Desboves.

Si l'on a une solution particulière ou générale

$$h^3 + k^3 = l^3 + n^3,$$

on aura aussi plusieurs identités semblables à la suivante :

$$(n^2)^3 + (kl)^3 + (hl)^3 = (hn)^3 + (kn)^3 + (l^2)^3,$$
$$n^2.kl.hl = hn.kn.l^2,$$

dont nous avons des solutions générales du huitième degré.

Exemple :

$$120^3 + 81^3 + 10^3 = 108^3 + 100^3 + 9^3,$$
$$120.81.10 = 108.100.9.$$

J'ai indiqué en 1910 le système suivant :

$$A = 2p^2 - 9pq + 6q^2; \qquad D = -p^2 + 9pq - 12q^2;$$
$$B = 2pq; \qquad E = 2p^2 - 10pq + 12q^2;$$
$$C = pq; \qquad F = p^2 - 5pq + 6q^2.$$

Exemple : $p = 5$, $q = 1$.

$$11^3 + 10^3 + 5^3 = 12^3 - 8^3 + 6^3,$$
$$11 + 10 + 5 = 12 - 8 + 6.$$

Je donnerai, pour terminer, une solution générale du système simultané :

$$G^3 + H^3 + K^3 = L^3 + M^3 + N^3,$$
$$G + H + K = L + M + N,$$
$$GHK = LMN$$

en entiers différents :

$$G = p(pq - r^2); \qquad L = q(pq - r^2);$$
$$H = q(qr - p^2); \qquad M = r(qr - p^2);$$
$$K = r(pr - q^2); \qquad N = p(pr - q^2).$$

Exemple : $p = 3$, $q = 2$, $r = 1$.

$$15^3 - 14^3 - 1^3 = 10^3 - 7^3 - 3^3,$$
$$15 - 14 - 1 = 10 - 7 - 3,$$
$$15.14.1 = 10.7.3.$$

Comme cas particulier, je citerai enfin :

$$G = 2a^2 - 4ab; \qquad L = ab - 2b^2;$$
$$H = 4ab - b^2; \qquad M = 2b^2 - 4a^2;$$
$$K = b^2 - 2a^2; \qquad N = 4a^2 - ab.$$

Exemple : $a = 4$, $b = 1$.

$$16^3 + 15^3 - 31^3 = -62^3 + 60^3 + 2^3,$$
$$16 + 15 - 31 = -62 + 60 + 2,$$
$$-16.15.31 = -62.60.2.$$

1677.

(1894, p. 4*.)

On considère les coniques inscrites dans un quadrilatère. Le lieu du second point de rencontre de chaque conique avec la droite joignant un sommet au point de contact avec un des côtés ne passant pas par ce sommet est une conique.

A. Cazamian.

Solution

Par un Abonné.

Prenons comme triangle de référence le triangle diagonal du quadrilatère. L'équation générale des coniques inscrites est

$$(1) \qquad x^2 - \frac{a^2 y^2}{\rho} + \frac{b^2 z^2}{\rho - 1} = 0;$$

ρ étant un paramètre variable.

Les équations des côtés du quadrilatère sont

$$(2) \qquad x + ay + bz = 0;$$

$$(3) \qquad x - ay + bz = 0;$$

$$(4) \qquad x + ay - bz = 0;$$

$$(5) \qquad x - ay - bz = 0.$$

Les coordonnées du sommet intersection de (3) et (4) sont

$$0, \quad b, \quad a$$

et celles du point de contact de (2) avec la conique (1) sont

$$ab, \quad -b\rho, \quad a(\rho - 1).$$

Par suite, l'équation de la droite qui joint le sommet au point de contact est

$$(6) \qquad (2\rho - 1)x + ay - bz = 0.$$

Pour avoir le lieu cherché il suffit d'éliminer le paramètre ρ entre les équations (1) et (6). Or de (6) on tire

$$\rho = \frac{x - ay + bz}{2x},$$

$$\rho - 1 = \frac{x + ay - bz}{2x}.$$

En portant ces valeurs dans (1), on obtient pour l'équation du lieu cherché

$$x(x-ay+bz)(x+ay-bz)$$
$$-2a^2y^2(x+ay-bz)-2b^2z^2(x-ay+bz)=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(x+ay+bz)[x(x-ay-bz)-2(ay-bz)^2]=0.$$

Le lieu se compose donc de la droite (2) et d'une conique. Cette dernière est tangente à la diagonale $x=0$ et à la droite (5) aux points où elles sont coupées par la droite

$$ay-bz=0.$$

Cette droite passe par le point d'intersection des diagonales $y=0$, $z=0$ et des droites (3) et (4).

1816.

(1899, p. 118.

On considère les pieds des quatre normales menées d'un point à une conique (C), *et les quatre triangles* T *formés par les tangentes menées en ces points à* C :

1° *A chaque triangle* T *on peut circonscrire une conique* A *ayant les mêmes axes de symétrie que* C;

2° *Les normales à la conique* A *aux sommets du triangle* T *sont concourantes en un point* P;

3° *De chaque point* P *on mène la quatrième normale à la conique* A *correspondante. Les quatre normales ainsi obtenues sont parallèles et leurs pieds sont en ligne droite.*

E. Duporcq.

Solution

Par un Abonné.

Soit

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de la conique C. Désignons par M le point d'où l'on mène les normales; par A, B, C, D les pieds de ces normales; par x_0, y_0 les coordonnées de M; par x_1, y_1 celles

de A. On a d'abord les relations

$$(2) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$(3) \qquad c^2 x_1 y_1 + b^2 y_0 x_1 - a^2 x_0 y_1 = 0,$$

qui expriment que le point A est à la fois sur la conique C et sur l'hyperbole d'Apollonius du point P.

Soient encore α et β les coordonnées du pôle de AB et α' et β' celles du pôle de CD. On sait qu'on a

$$\alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2,$$

et puisque le pôle de AB décrit la tangente en A, il en résulte

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} + \frac{\beta y_1}{b^2} - 1 = 0,$$

ou encore

$$\frac{x_1}{\alpha'} + \frac{y_1}{\beta'} + 1 = 0.$$

En remplaçant α' et β' par les coordonnées courantes x et y, on voit que les sommets du triangle T sont sur la conique

$$(4) \qquad \frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y} + 1 = 0.$$

C'est une hyperbole équilatère passant à l'origine, ayant pour centre le point diamétralement opposé à A sur C et pour directions asymptotiques Ox et Oy.

Pour trouver d'autres coniques circonscrites à T, rappelons les formules de Desboves

$$x_0 = -\frac{c^2 x(y^2 - b^2)}{a^2 y^2 + b^2 x^2}, \qquad y_0 = \frac{c^2 y(x^2 - a^2)}{a^2 y^2 + b^2 x^2}.$$

Grâce aux relations (3) et (4), elles s'écrivent, après quelques transformations et simplifications,

$$(5) \qquad b^2 x_0 y_1 x^2 + b^2 y_0 x_1 y^2 - c^2 y_1^2 xy - b^2 c^2 y_1 x = 0,$$

$$(6) \qquad a^2 x_0 y_1 x^2 + a^2 y_0 x_1 y^2 + c^2 x_1^2 xy + a^2 c^2 x_1 y = 0;$$

équations de deux coniques passant par les sommets de T. De (4) et (5) on déduit, toujours grâce aux relations (2)

et (3),

$$(7)\quad a^2 x_0 y_1 x^2 + b^2 y_0 x_1^2 x - a^2 y_0 x_1 y_1 y - a^2 c^2 x_1 y_1 = 0.$$

De même, de (4) et (6), on tire

$$(8)\quad b^2 y_0 x_1 y^2 - b^2 x_0 x_1 y_1 x + a^2 x_0 y_1^2 y + b^2 c^2 x_1 y_1 = 0.$$

Enfin, en combinant (7) et (8), on trouve

$$(9)\qquad a^2 x_0^2 y_1^2 x^2 + b^2 y_0^2 x_1^2 y^2 - c^4 x_1^2 y_1^2 = 0;$$

c'est l'équation de la conique A.

En appelant (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées des sommets du triangle T, on obtient, grâce aux équations (4) et (5), les relations

$$(10)\qquad x' x'' x''' = \frac{c^2 x_1^2}{x_0}, \qquad y' y'' y''' = -\frac{c^2 y_1^2}{y_0}.$$

En appelant ξ et η les coordonnées du pied de la quatrième normale à la conique A, on trouve, au moyen de (4) et (9),

$$x' x'' x''' \xi = -\frac{c^4 x_1^4}{a^2 x_0^2}, \qquad y' y'' y''' \eta = \frac{c^2 y_1^4}{b^2 y_0^2};$$

et, par suite,

$$(11)\qquad \xi = -\frac{c^2 x_1^2}{a^2 x_0}, \qquad \eta = \frac{c^2 y_1^2}{b^2 y_0}.$$

Les formules (10) et (11) permettent de résoudre les deux dernières parties de la question.

Observons que l'hyperbole équilatère (4) est une hyperbole d'Apollonius pour la conique (9) et que par suite les normales à cette dernière conique, aux sommets du triangle T, sont concourantes.

Les coordonnées du point de concours P sont

$$\alpha = \frac{a^2 x_0^2 y_1^2 - b^2 y_0^2 x_1^2}{b^2 y_0^2 x_1}, \qquad \beta = -\frac{a^2 x_0^2 y_1^2 - b^2 y_0^2 x_1^2}{a^2 x_0^2 y}.$$

Le coefficient angulaire de la quatrième normale issue de P est égal à $\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}$. Après des réductions obtenues au moyen

de (3), on trouve

$$\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha} = -\frac{y_0}{x_0};$$

il est donc constant.

Des relations (11) on déduit

$$-\frac{x_0\xi}{c^2} - \frac{y_0\eta}{c^2} - \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Les pieds des quatrièmes normales sont donc sur la droite

$$x_0\xi - y_0\eta + c^2 = 0.$$

1848.

(1900, p. 192.

Si une cubique unicursale tritangente à une conique découpe sur chacune des tangentes aux trois points de contact un segment qui soit vu de l'un des foyers de la conique sous un angle droit, l'un des segments déterminés par cette cubique sur une tangente quelconque à la conique est vu du même foyer sous un angle droit.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Cette question avait été posée pour provoquer la recherche d'une démonstration directe du théorème qui en fait l'objet, lequel provient tout simplement de l'application de la transformation par polaires réciproques (dans le cas d'un cercle directeur) à un théorème de Laguerre sur les courbes unicursales de la troisième classe tritangentes à un cercle et tangentes, en outre, aux normales à ce cercle menées par les points de contact, théorème consistant en ce que deux des tangentes que, de chaque point de ce cercle, on peut mener à la courbe sont rectangulaires (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. VI, 1877, p. 56, et *Œuvres*, t. II, p. 478). On obtiendrait donc une démonstration de la proposition ci-dessus en transformant dualistiquement celle que Laguerre a donnée, à l'endroit cité, de son théorème. Nous laisserons au lecteur le soin d'effectuer cette transformation. Mais nous ajouterons ici quelques remarques à ce sujet.

Parmi les courbes unicursales de la troisième classe, une des

plus connues est l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, entièrement caractérisée, dans cette catégorie, par le fait qu'elle est *bitangente à la droite de l'infini avec les points cycliques comme points de contact.* Une telle courbe H est tritangente au cercle C qui passe par ses trois sommets, en même temps qu'aux normales à ce cercle, qui la touchent en ses points de rebroussement. Donc, en vertu du théorème de Laguerre ci-dessus rappelé, le cercle C est orthoptique pour l'hypocycloïde H, ainsi d'ailleurs que cela a, depuis longtemps, été remarqué par Steiner.

Appliquons la transformation par polaires réciproques à ce cas. La polaire réciproque de H sera une cubique unicursale Γ admettant pour point double isolé le centre de la transformation, où les tangentes (polaires des points cycliques) seront les droites isotropes. Cette courbe Γ sera donc ce que Salmon appelle une cubique *acnodale,* dont le point double isolé sera en même temps pour elle un foyer F. Au cercle C correspondra une conique γ ayant aussi pour foyer le centre F de la transformation et qui sera tritangente à Γ. Les tangentes aux trois points de contact de H et de C formant un triangle équilatéral, les trois points de contact de Γ et de γ seront situés sur des rayons vecteurs, issus de F, à 120° les uns sur les autres. Aux normales à C qui passent par ses points de contact avec H, c'est-à-dire aux droites unissant ces points de contact au centre de C, correspondent les points situés à la rencontre des tangentes communes à Γ et γ et de la directrice δ de γ répondant au foyer F. Et comme, sur la première figure, ces trois normales sont pour H des tangentes de rebroussement, sur la seconde, les points correspondants seront pour Γ des points d'inflexion. Finalement on obtient ce théorème :

Si le point double isolé d'une cubique acnodale Γ *est en même temps pour cette courbe un foyer* F, *il existe une conique* γ *de foyer* F *tritangente à* Γ, *et l'un des segments déterminés par* Γ *sur chaque tangente de* γ *est vu de* F *sous un angle droit. D'ailleurs, les distances mutuelles des points de contact de* Γ *et* γ *sont vues de* F *sous des angles de* 120° *et les points d'inflexion de* Γ *sont à la rencontre des tangentes en ces points de contact et de la directrice* δ *de* γ *répondant au foyer* F.

1873.

1900, p. 432.

On considère une ellipse E *et un cercle* C *concentrique à* E. *Si cette ellipse, entraînant avec elle le cercle* C, *se déplace de façon à être constamment tangente à une droite fixe en un point donné, les courbes engendrées par les divers points du cercle* C *ont toutes même aire.*

E.-N. Barisien.

Solution
Par un Abonné.

Un point, invariablement lié à E et entraîné dans son déplacement, engendre une courbe, appelée *glissette*, qui est identique à la roulette que décrit le point, considéré comme invariablement lié à la développée de E, lorsque cette développée roule sur la normale à la droite fixe au point fixe (voir *Nouv. Ann.*, 1915, p. 270).

D'autre part, d'après un théorème classique, la surface d'une roulette à base rectiligne est double de la surface de la podaire correspondante.

Enfin l'on sait que, si l'on appelle S_0 l'aire de la podaire d'une courbe par rapport à un point O de son plan, et S l'aire de la podaire par rapport à un autre point P, on a

$$S = S_0 + \frac{\pi}{2}\overline{PO}^2.$$

De tout cela il résulte bien que les courbes engendrées par les divers points de C ont même aire et que cette aire commune est égale à celle de la courbe décrite par le centre de E, augmentée de l'aire du cercle C.

2118.

1909, p. 100.

L'équation

$$x = e\sin(m + x) = 0$$

peut s'écrire

$$\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) = \frac{\rho + e}{\rho - e}\operatorname{tang}\frac{m}{2},$$

ou

$$\rho = \frac{x}{\sin x}.$$

Construire le lieu de l'intersection des droites menées par les extrémités A *et* B, *du segment* AB $= e$, *et faisant avec ce segment respectivement les angles* m *et* $m + x$.

A. Pellet.

Solution

Par M. Vaulot.

L'équation donnée peut s'écrire successivement

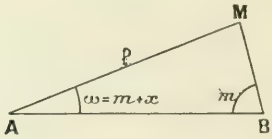
$$\frac{x}{e} = \sin(m+x) = \sin\left(x+\frac{m}{2}\right)\cos\frac{m}{2} + \sin\frac{m}{2}\cos\left(x+\frac{m}{2}\right),$$

$$\frac{x}{e\cos\left(x+\frac{m}{2}\right)\cos\frac{m}{2}} = \operatorname{tang}\left(x+\frac{m}{2}\right) + \operatorname{tang}\frac{m}{2},$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\left(x+\frac{m}{2}\right) &= \operatorname{tang}\frac{m}{2}\left[\frac{x}{e\cos\left(x+\frac{m}{2}\right)\sin\frac{m}{2}} - 1\right] \\
&= \operatorname{tang}\frac{m}{2}\left[\frac{2x}{e\sin(m+x) - e\sin x} - 1\right] \\
&= \operatorname{tang}\frac{m}{2}\left[\frac{2x}{x - e\sin x} - 1\right] \\
&= \operatorname{tang}\frac{m}{2}\,\frac{x + e\sin x}{x - e\sin x} \\
&= \operatorname{tang}\frac{m}{2}\,\frac{\frac{x}{\sin x} + e}{\frac{x}{\sin x} + e} \\
&= \operatorname{tang}\frac{m}{2}\,\frac{\rho + \varepsilon}{\rho - \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Pour construire le lieu demandé, je vais chercher son

Fig. 1.



équation en coordonnées polaires, le rayon vecteur d'un

point M du lieu étant AM $= \rho$ et son angle polaire

$$\mathrm{MAB} = \omega = m + x.$$

On a les équations

$$x = e \sin(m + x),$$
$$\rho = \frac{e \sin m}{\sin(2m + x)},$$
$$\omega = m + x.$$

En éliminant m et x on tire l'équation de la courbe qui est

$$\rho = \frac{e \sin(2\omega - e \sin\omega)}{\sin(2\omega - e \sin\omega)}.$$

Pour la construire je remarque qu'il suffit, pour avoir toute la courbe, de faire varier ω dans un intervalle de 2π. Comme ρ reste le même quand on change ω en $-\omega$, nous allons faire varier ω de 0 à π et prendre la partie symétrique par rapport à AB.

Remarquons tout de suite que, pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, ρ se présente sous des formes indéterminées. On trouve sans difficulté que les valeurs limites de ρ pour ces valeurs de ω sont : pour $\omega = 0$,

$$\rho_0 = \frac{e(1 - e)}{2 - e},$$

pour $\omega = \pi$,

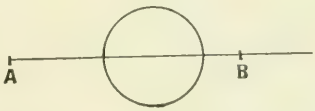
$$\rho_\pi = \frac{e(1 + e)}{2 + e}.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas suivant que les termes de la fraction qui donne ρ s'annulent ou ne s'annulent pas.

Premier cas : $e < 1$. — ρ ne s'annule ni ne devient infini. On a

$$\rho_0 < \rho_\pi < e.$$

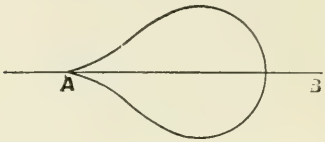
Fig. 2.



La courbe a la forme indiquée par la figure 2.

Deuxième cas : $e = 1$. — L'origine est un point de rebrous-

Fig. 3.



sement et l'on a

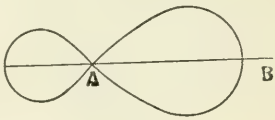
$$\rho_\pi = \frac{e}{2}.$$

Troisième cas : $1 < e < 2$. — On a

$$\rho_0 < 0, \qquad 0 < \rho_\pi < e.$$

L'origine est un point double, et l'on a la forme de courbe représentée par la figure 4.

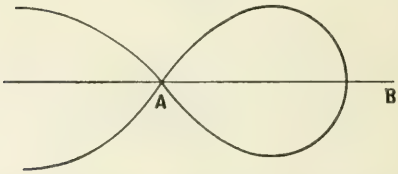
Fig. 4.



Quatrième cas : $e = 2$. — On a

$$\rho_\pi = \frac{3e}{3}.$$

Fig. 5.



En cherchant la limite de ρ pour $\omega = 0$, on trouve que

ρ tend vers l'infini. En cherchant la limite de $\rho \sin\omega$, on voit que cette limite est l'infini. Il y a donc deux branches paraboliques (*fig.* 5).

Cinquième cas : $e > 2$. — Ce cas peut présenter de grandes différences. ρ s'annule quand on a

$$\omega - e \sin\omega = K\pi,$$

et devient infini quand on a

$$2\omega - e \sin\omega = K\pi.$$

Le nombre des valeurs qni annulent ρ et de celles qui le rendent infini tendent l'un et l'autre vers l'infini quand e augmente indéfiniment.

2214.

(1914, p. 95).

Démontrer l'identité suivante, où p est entier et m quelconque

$$\left[\frac{x^p}{m} - \frac{p x^{p-1}(1+x)}{m(m-1)} - \ldots \right.$$
$$\left. - \frac{p(p-1)\ldots 1.(1+x)^p}{m(m-1)\ldots(m-p)}\right] \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{p!}$$
$$= 1 + A_1 x + \ldots + A_p x^p,$$

avec

$$A_1 = \frac{m}{1}, \qquad A_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}, \qquad \ldots.$$

Pour m entier et $p \geqq m$, il faut faire entrer le facteur $m - m$ dans la parenthèse, simplifier comme si ce facteur n'était pas nul, et faire ensuite $m - m = 0$.

Quel résultat obtient-on en supposant que m, d'abord quelconque, tend vers le nombre entier u, avec $p \geqq u$?

G. Fontené.

Solution

Par M. T. Ono.

L'identité est égale à

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I})\ (1+x)^p &+ \frac{m-p}{1}(1+x)^{p-1}x \\
&+ \frac{(m-p)(m-p+1)}{2!}(1+x)^{p-2}x^2+\ldots \\
&+ \frac{(m-p)(m-p+1)\ldots(m-2)}{(p-1)!}(1+x)x^{p-1} \\
&+ \frac{(m-p)(m-p+1)\ldots(m-1)}{p!}x^p \\
&= 1+\mathrm{A}_1x+\ldots+\mathrm{A}_px^p.
\end{aligned}
$$

En comparant les coefficients de x^n, on arrive à avoir l'identité

$$
\begin{aligned}
&p(p-1)\ldots(p-n+1)+\mathrm{C}_n^1q(p-1)\ldots(p-n+1) \\
&\quad+\mathrm{C}_n^2q(q+1)\ldots(p-2)\ldots(p-n+1)+\ldots \\
&\quad+\mathrm{C}_n^{n-1}q(q+1)\ldots(q+n-2)(p-n+1) \\
&\quad+\mathrm{C}_n^nq(q+1)\ldots(q+n-1) \\
&=(p+q)(p+q-1)\ldots(p+q-n+1),
\end{aligned}
$$

où

$$m-p=q.$$

Or, ceci est évident; on le vérifie en posant dans le premier membre

$$q=-p,\quad -p+1,\quad -p+2,\quad \ldots,\quad -p+n-1.$$

On peut faire aussi la remarque suivante :

Le premier membre de (I) est égal au coefficient de z^p du produit de deux expressions

$$\frac{1}{1-(1+x)z}=1+(1+x)z+\ldots+(1+x)^pz^p+\ldots;$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-xz)^{m-p}} &= 1+\frac{m-p}{1}xz+\ldots \\
&\quad+\frac{(m-p)\ldots(m-1)}{p!}x^pz^p+\ldots.
\end{aligned}
$$

Or,

$$\frac{1}{1-(1+x)z}\,\frac{1}{(1-xz)^{m-p}}$$

$$= \frac{1}{(1-xz)^{m-p+1}}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{1-xz}}$$

$$= \frac{1}{(1-xz)^{m-p+1}} + \frac{z}{(1-xz)^{m-p+2}} + \ldots$$

$$+ \frac{z^{p-1}}{(1-xz)^{m}} + \frac{z^{p}}{(1-xz)^{m+1}} + \ldots;$$

alors le coefficient de z^p est égal à

$$\frac{(m-p+1)\ldots(m-1)m}{p!}\,x^p + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \frac{m}{1}\,x + 1.$$

N. B. — Dans l'identité (I) on n'a pas besoin de distinguer les cas où m est entier ou non.

2219.

(1914, p. 111.)

Une hypocycloïde (H) *et une épicycloïde* (E) *à trois rebroussements ont les mêmes points de rebroussements : démontrer que la tangente de* (H) *en un point quelconque* A *coupe* (E) *en deux points réels* B *et* B′ *dont la distance est constante; les milieux* AB *et* AB′ *appartiennent à* (H); *les normales en* B *et* B′ *à* (E) *sont rectangulaires et se coupent sur les cercles des rebroussements; les tangentes en ces points se coupent sur le cercle des sommets de* (E); *le cercle de diamètre* BB′ *touche les deux cercles précédents.*

J. Lemaire.

Solution

Par Mlle Anne de Préhyr.

Soient :

O le centre d'une circonférence de rayon R;

CC′ un diamètre quelconque de cette circonférence;

C_1 et C'_1, C_2 et C'_2 les centres de circonférences de même rayon $\frac{R}{3}$, tangentes extérieurement ou intérieurement à O en C et C′;

BB′ une parallèle quelconque à CC′ allant de la circonférence C_1 à la circonférence C'_1, avec $BB' = C_1C'_1 = \frac{8R}{3}$;

D et D′ les points où BB′ coupe les circonférences C_2, C'_2 avec arc CB = arc CD et arc C′B′ = arc C′D′;

E le point de la circonférence O où se coupent les droites BC, B′C′;

A la projection de E sur BB′, G la projection de E sur CC′;

E′ le point où EA rencontre encore la circonférence O;

F le point où OE′ coupe BB′.

Ayant OF : OE′ = GA : AE′ = CA : GE = BC : CD = 1 : 3, la circonférence de diamètre FE′ passe en A et a $\frac{R}{3}$ pour rayon.

D'autre part, des angles égaux en F, O et C_1 donnent

$$\text{arc}\,AE' + \text{arc}\,CB = \text{arc}\,CE',$$

et les notations définies ci-dessus se confondent avec celles de l'énoncé.

On a déjà $BB' = \frac{8R}{3} = \text{const.}$, et les normales en B et B′ à (H) se coupent à angle droit en E sur le cercle des rebroussements O.

Les tangentes en B et B′ à (H) achèvent le rectangle BEB′L; L est sur AO et l'on a immédiatement $OL = \frac{5R}{3}$, ce qui justifie le lieu indiqué pour L et les propriétés de la circonférence de diamètre BB′.

Il reste à démontrer que AD = DB. Or si K est la projection de C sur BD, on a

$$BD = 2\,BK = 2\,BA\,\frac{BC}{BE} = 2\,BA\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,BA.$$

C. Q. F. T.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XV, 4e SÉRIE.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

		Pages.
A1a	Sur les progressions arithmétiques disposées en escalier, par M. *R. Alezais*	64
A1a	Propriété de deux suites sommables, par M. *C.-A. Laisant*	166
A4e	Sur un théorème d'Algèbre, par M. *Myller Lebedeff*	228
A5	Généralisation d'une formule connue, par M. *G. Fontené*	112
H2a	Sur l'intégration de l'équation différentielle linéaire, par M. *Parfentieff*	78
H2c	Intégration de l'équation différentielle des coniques homofocales, par M. *F. Balitrand*	429
I19a	Sur le système d'équations indéterminées $x^2+y=z^2$, $x+y^2=t^2$, par M. *C.-A. Laisant*	106

Géométrie.

K'2b K'5b	Sur quatre triangles homothétiques, par M. *V. Thébault*	193
K'2d	Généralisation du théorème de Kariya, par M. *A. Auric*	222
K'2d	Note sur l'eulérienne, par M. *A. Auric*	321
K'2d	Sur un théorème de Mœbius, par M. *A. Auric*	426
K'2d	Sur une conique associée au triangle, par M. *R. Goormaghtigh*	449
K'2d	Sur les cercles podaires et isopodaires d'un point par rapport à un triangle, par M. *R. Bouvaist*	555

Pages.

K¹2d K¹5 Notes diverses de Géométrie, par M. *V. Thébault*..... 454
K¹5c Note sur la lemoinienne, par M. *A. Auric*..... 273
K¹5c Note sur la brocardienne, par M. *A. Auric*.... 355
K¹6a Le calcul symbolique des coordonnées barycentriques, par M. *A. Auric*..... 481
K¹11c Sur les quadrilatères de Poncelet, par M. *P. Montel*..... 57
K¹11e Nouveau théorème relatif à des circonférences tangentes, par M. *J. Joffroy*..... 440
L¹1a Interprétation exacte de l'expression
$$s = ax^2 + 2bxy + by^2 + 2gx + 2fy + e,$$
en y supposant les coordonnées courantes remplacées par celles d'un point donné, par M. *E. Malo*..... 157
L¹4 Sur les coniques inscrites à un triangle, par M. *V. Thébault*..... 70
L¹5 L²8 Remarques sur la théorie des normales aux coniques et aux quadriques, par *Un abonné*.... 231
L¹9b Sur les couples de points associés sur une ellipse en vertu du théorème de Fagnano, par M. *M. d'Ocagne*..... 337
L¹16 Théorèmes sur les coniques, par M, *J. Lemaire*. 289
L²11 Courbure moyenne de l'ellipsoïde et du cylindre elliptique, exprimée à l'aide des fonctions de Lamé, par M. *Globa-Mikhaïlenko*... 277
M¹1c Points conjugués d'ordre p d'un point P; polaires successives, par M. *G. Fontené*..... 145
M¹5kα A propos de la question 1491, par M. *F. Gomes Teixeira*..... 362
M¹8a Note sur la Néphroïde de Proctor, par M. *F. Balitrand*..... 97
M¹8a Note sur la Cardioïde, par M. *F. Balitrand*... 214
M¹8a M¹aα Épi- et hypocycloïde associées, par M. *M. d'Ocagne*..... 433
M¹8a M¹aα Étude géométrique sur la rectification et la quadrature des épi- et hypocycloïdes, par M. *M. d'Ocagne*..... 533
M36bα Note sur la courbe de Viviani, par *Un anonyme*. 170
M¹c, e Sur un groupe de courbes classiques, par *Un abonné*..... 511
M¹e Sur la spirale tractrice et sur une courbe associée, par M. *F. Balitrand*..... 347
O¹2 Quelques applications des coordonnées intrin-

Pages.

sèques, par M. *F. Balitrand* 1

O¹2 Sur les courbes unicursales à arc rationnel, par M. *J. Haag* 75

O¹2p, q Note sur les roulettes et les glissettes planes à base rectiligne, par M. *F. Balitrand* 243

O¹2q Sur une courbe sphérique, par M. *G. Fontené* .. 320

O¹2qβ Démonstration géométrique d'un théorème de Cornu sur les caustiques, par M. *M. d'Ocagne*. 508

O¹3e Note sur la torsion, par M. *J. Haag* 108

P¹4 Sur une correspondance birationnelle involutive dans l'espace, par M. *G. Fontené* 515

P¹6f Sur la transformation par aires constantes, par M. *R. Goormaghtigh* 393

Mathématiques appliquées.

R3aα Mouvement d'un corps autour d'un point fixe, avec forces; cas où l'ellipsoïde d'inertie reste tangent à un plan fixe, par M. *G. Fontené* .. 225

R5c Sur le mouvement rectiligne tautochrone. Généralisation, par M. *E. Cahen* 175

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Analyse infinitésimale 117
Analyse supérieure 122
Astronomie 80
Calcul différentiel et intégral 236
Mathématiques générales 31, 179
Mécanique appliquée 283, 377, 521

Questions de concours; énoncés.

Agrégation. — Exercices : Calcul, Mécanique 365

Questions de concours; solutions.

Agrégation (1914). — Solution de la question de Mathématiques spéciales, par M. *J. Lemaire* 13

Correspondance.

Un abonné : Au sujet de la puissance d'un point par rapport à une conique 327
Un abonné : Sur la documentation bibliographique 467

Pages

M. A. Auric : Au sujet du système d'équations $x^2+y=z^2$, $x+y^2=t^2$ 280
M. H. Brocard : Au sujet de la Néphroïde de Proctor 235
M. J. Joffroy : Propriété de deux progressions 114
M. M. D'Ocagne : A propos de la question 2212 113
Au sujet d'une Note de M. Balitrand 113
Au sujet de la question 1617 368
A propos des points associés de Fagnano .. 466
A propos de la spirale tractrice 517
Au sujet d'une note récente de M. Goormaghtigh 519
M. T. Ono : Au sujet des questions 2201 et 2238 467
M. J. Pal : Au sujet d'un article de M. Bricard 30
M. Ph. du Plessis : Rayons de courbure de la Néphroïde et de la Cardioïde 281
A propos d'une correspondance de M. Joffroy (p. 114) 328

Nécrologie.

Jules Molk, A. de Saint-Germain, G.-B. Guccia, F. Cherbuliez, A. Venturi, N. Sonin, G. Pirondini 115

Questions.

1704 *bis* (réimpression) 288
2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240 52
2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248 142
2249, 2250 288
2251, 2252 391
2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258 431
2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270 477
2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279 531

Solutions de questions proposées.

A propos des questions des *Nouvelles Annales* (La Rédaction). 241
Note de la Rédaction au sujet des questions non résolues 480
439, par M. *H. Brocard* 330
511 (note), par M. *C.-A. Laisant* 331
511, par M. *R. B.* 468
585, par *Un abonné* 563
718, par M. *H. Brocard* 469

Pages.
829, par M. *H. Brocard* 191
882, 883, 884, 885 (Note de la Rédaction : annulation) 332
937, par M. *H. Brocard* 192
938, par M. *H. Brocard* 333
1307, par M. *H. Brocard* 369
1310, par M. *A. Gérardin* 564
1491, par M. *H. Brocard* 138
1491 (Article de M. *Gomes Teixeira*) 362
1505, par *l'Auteur* 469
1531, par *Un abonné* 472
1576, par M. *H. Brocard* 335
1617 (Correspondance : Note et rectification), par M. *M. d'Ocagne* 368
1630, par M. *H. Brocard* 139
1630 (Note), par M. *R. Bouvaist* 472
1676, par M. *H. Brocard* 370
1677, par *Un abonné* 567
1704, par M. *H. Brocard* 371
1733, par M. *H. Brocard* 373
1770, par *Un abonné* 473
1799, par M. *H. Brocard* 374
1816, par *Un abonné* 568
1827, par M. *H. Brocard* 374
1834, par M. *H. Brocard* 474
1848, par M. *M. d'Ocagne* 571
1856, par M. *C.-A. Laisant* 375
1873, par *Un abonné* 573
1920, par M. *H. Brocard* 475
2118, par M. *Vaulot* 574
2166 (Note de la Rédaction) 376
2201 (Correspondance : Remarque), par M. *T. Ono* 467
2212 (Correspondance : Note), par M. *M. d'Ocagne* 113
2214, par M. *T. Ono* 578
2219, par Mlle *A. de Préhyr* 579
2222, par M. *R. Bouvaist* 50
2226, par M. *R. Bouvaist* 51
2227, par M. *R. Bouvaist* 51
2228, par M. *R. Bouvaist* 52
2229, par M. *J. Lemaire* 286
2230, par M. *R. Bouvaist* 287
2238 (Correspondance : annulation), par *l'Auteur* 467
2249 (Remarque), par *la Rédaction* 364
2277 (Note de la Rédaction : annulation) 562

Errata 96, 144, 288, 392, 432, 532

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XV, 4e SÉRIE.)

Un abonné, 231, 327, 472, 473, 511, 563, 567, 568, 573.
ABRAMESCU, 53, 54.
R. ALFZAIS, 64.
Anonyme, 170.
A. AURIC, 222, 273, 280, 321, 355, 426, 481.

F. BALITRAND, 1, 51, 55, 97, 144, 214, 248, 288, 347, 429, 431, 479, 531, 532.
E.-N. BARISIEN, 55, 144.
R. BOUVAIST, 50, 51, 52, 287, 472, 555.
R. BRICARD, 468.
H. BROCARD, 138, 139, 191, 192, 235, 330, 333, 334, 335, 369, 370, 371, 373, 374, 469, 474, 475.

E. CAHEN, 175.

G. FONTENÉ, 112, 145, 225, 320, 392, 479, 515.

A. GÉRARDIN, 564.
GLOBA-MIKHAILENKO, 277.
F. GOMES TEIXEIRA, 362.
R. GOORMAGHTIGH, 393, 446.

J. HAAG, 75, 108.

J. JOFFROY, 114, 440.

C.-A. LAISANT, 106, 166, 331, 373, 375.
J. LEMAIRE, 13, 286, 289.

E. MALO, 157.
P. MONTEL, 57.
MYLLER-LEBEDEFF, 228.

M. D'OCAGNE, 113, 143, 337, 368, 431, 432, 433, 466, 469, 478, 479, 508, 517, 519, 531, 532, 533, 571.
T. ONO, 56, 432, 467, 477, 578.

J. PAL, 30.
PARFENTIEFF, 78.
PH. DU PLESSIS, 281, 328.

La Rédaction, 241, 332, 364, 376, 480, 562.

TEIXEIRA (voir *Gomes Teixeira*).
V. THÉBAULT, 56, 70, 143, 193, 432, 454, 477, 478, 531.

VAULOT, 574.

M. WEILL, 288.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
55788 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
N8
v.74

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY